

**APLIKACIJA TEORIJSKIH RASPODJELA NA DEBLJINSKU
STRUKTURU JEDNODOBNIH SASTOJINA SMRČE
(*Picea abies* Karst.) U BOSNI I HERCEGOVINI**

**Application of theoretical distributions on diameter structures of
spruce (*Picea abies* Karst.) even-aged stands in Bosnia-Herzegovina**

Čabaravdić Azra* i Lukić Nikola**

* Šumarski fakultet Sarajevo

** Šumarski fakultet Zagreb

Abstract

A determination of analytical expression for diameter structure of forest plantations is a base for an analyses of their different structural and productivity characteristics. Statistics of empirical diameter distribution point out that successful application may be achieved with some theoretical distribution, like: the Gaussian, the Poisson, the binomial, the Levakovic and the beta distributions, the most common used today. The aim of this work is to evaluate use of the theoretical distribution describing diameter structure of 60 years old forest spruce plantations. Database was collected on 57 temporary sample plots in even-aged spruce stands in Bosnia-Herzegovina.

Key words: *Picea abies*, diameter structure, theoretical distributions (Gaussian, Poisson, binomial, beta, Levaković).

1. Uvod

Racionalno gazdovanje jednodobnim sastojinama zahtjeva poznavanje njihovih strukturnih i proizvodnih karakteristika. Osnovu za opisivanje ovih karakteristika čini debljinska struktura, tj. raspodjela stabala sastojine po debljinskim stupnjevima. Analiza grafičkih prikaza ovih raspodjela kod jednodobnih sastojina ukazuje na zakonitost oblika raspodjela koje se javljaju u različitim fazama starosti sastojine. Karakteristike ovih oblika raspodjela dovele su do istraživanja pojedinih matematičkih modela za analitičko izražavanje debljinske strukture. Levaković (1935) navodi primjenjivost Gaussove raspodjele kod simetričnih empirijskih raspodjela, te Poissonovu raspodjelu za empirijske raspodjele jake simetrije. Modificirajući Pearsonovu funkciju, Levaković preporučuje za analitičko izražavanje sastojinske strukture tzv. Levakovićevu funkciju (7).

Prodan (1953), prema Matić-u (1977), nalazi da je binomska raspodjela stabala mladih jednodobnih sastojina gotovo simetrična i da veoma malo odstupa od Gaussove raspodjele. Schröder (1993) navodi primjenjivost Weibul-ove funkcije za

opisivanje debljinske strukture. Radi mogućnosti izražavanja gotovo svih oblika raspodjela koje se javljaju u jednodobnim sastojinama Lukić (1997) predlaže beta raspodjelu.

Cilj ovog rada je da ocjeni pogodnost pojedinih teorijskih raspodjela, te da preporuči modele koji su najbolji za izražavanje debljinske strukture jednodobnih sastojina smrče u Bosni i Hercegovini starosti do 60 godina.

2. Materijal i metod

2.1 Objekat istraživanja

Objekt istraživanja predstavljaju privremene ogledne plohe nenjegovanih jednodobnih sastojina smrče, starosti 11-60 godina, postavljene u Bosni i Hercegovini ljeta 1989. godine.

Na terenu su utvrđene karakteristike lokaliteta i obavljena mjerenja potrebnih taksacionih podataka, a zatim su, prema metodici izvođenja radova (Pavlič, J. i drugi, 1988), prikupljene određene kvalitativne karakteristike stabala. Izvršeno je mjerenje prsnog promjera svih stabala na oglednim površinama i podaci tih mjerenja korišteni su za određivanje parametara empirijskih raspodjela.

2.2 Aplikativne teorijske raspodjele

Teorijske raspodjele su matematički definirane i njima se može opisivati i pratiti razvoj debljinske strukture sastojine. Ustvari, definirane su funkcije vjerovatnoće pojedinih raspodjela, čijim se korištenjem može odrediti najvjerojatniji broj stabala u bilo kojem debljinskom stupnju ili drugom odabranom intervalu.

Analiza statističkih parametara empirijskih raspodjela i uvjeta primjene pojedinih teorijskih modela je ukazala na mogućnost provjere pogodnosti slijedećih teorijskih raspodjela:

2.2.1 Gaussova raspodjela

$$p_x^G = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$$

gdje su:

p_x^N -vjerovatnoća Gaussove raspodjele,

x - prsni promjer stabla ,

μ - aritmetička sredina prsnog promjera klase starosti,

σ - standardna devijacija prsnog promjera klase starosti;

Teorijske frekvencije određene su kao:

$$f^G = N * c * p_x^G$$

pri čemu je: N -veličina uzorka,

c - dužina intervala klase starosti

2.22 Binomna raspodjela

Funkcija raspodjele binomnih vjerovatnoća je:

$$p_x^B = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

gdje su: - p_x^B vjerovatnoća binomne raspodjele,

n - veličina uzorka,

p - vjerovatnoća elementarnog događaja;

Teorijske frekvencije određene su kao:

$$f^B = N * p_x^B$$

2.23 Poissonova raspodjela

$$\text{POISSON} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

gdje je: λ - aritmetička sredina prsnog promjera klase starosti;

Teorijske frekvencije određene su kao:

$$f^P = N * p_x^P$$

2.24 Beta raspodjela

$$f(x) = c(x-a)^\alpha (b-x)^\gamma$$

gdje su:

x - prsni promjer,

c - konstanta,

a - donja granica prvog debljinskog stupnja,

b - gornja granica posljednjeg debljinskog stupnja,

α, γ - parametri beta funkcije.

2.25 Levakovićeve raspodjele

$$Y = Kx^{c_1} (1-x)^{c_2}$$

gdje je:

Y - relativni broj stabala određenog debljinskog stupnja

K - konstanta

x - debljinski stupanj u relativnom odnosu

c_1, c_2 - parametri funkcije

2.3 Testiranje teorijskih raspodjela

Ocjene o prilagođenosti raspodjela izvedene su interpretacijom dobijenih

veličina prosječnog kvadratnog odstupanja (13), te upoređenjem izračunatih i utabličenih kritičnih vrijednosti χ i Kolmogorov-Smirnov testova (13).

2.31 Prosječno kvadratno odstupanje (σ^2)

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{n+1} \sum (E_i - T_i)^2$$

E_i - empirijska frekvencija klase starosti,

T_i - teorijska frekvencija klase starosti;

2.32 Kvadrat (χ^2)

$$\chi^2 = \sum \frac{(E_i - T_i)^2}{T_i}$$

- mjera odstupanja posmatranih raspodjela.

2.33 Kolmogorov- Smirnov test

$$D = \frac{|\max d_i|}{n}$$

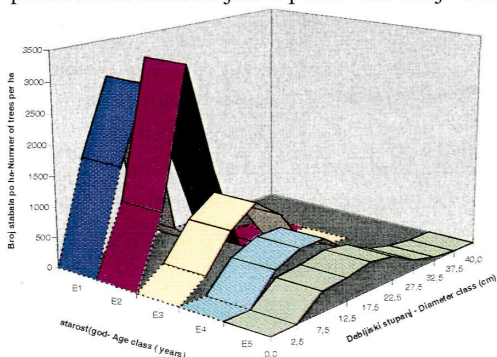
D - maksimalna apsolutna razlika između kumulanti empirijske i teorijske raspodjele,

d_i - apsolutne razlike između kumulanti empirijske i teorijske raspodjele

3. Rezultati istraživanja

3.1 Karakteristike empirijskih raspodjela

Analizirajući grafički prikaz empirijskih raspodjela (Graf. 1), uočava se, u prvom redu, da se kod mladih jednodobnih sastojina javljaju izdužene, pozitivno asimetrične raspodjele. S porastom starosti, raspodjele postaju spljoštenije sa malom pozitivnom asimetrijom i porastom varijacionih širina.



Graf. 1: Debljinska struktura jednodobnih sastojina smrče starosti do 60 g.

Fig. 1. Breast diameter structure of spruce (*Picea abies*) even-aged stands up to 60 years old

Očigledno je da, u određenoj mjeri, empirijske raspodjele poprimaju oblike koji ne ispunjavaju uvjete za primjenu Gaussove, binomske i Poissonove raspodjele, na što ukazuju i statistički pokazatelji debljinskih struktura klasa starosti. U tabeli 1. dati su statistički pokazatelji klasa starosti empirijskih raspodjela: prosjek, standardna devijacija, standardna greška, raspon variranja, koeficijent variranja, asimetrija, zakrivljenost i promjer srednjeg stabla po temeljnici.

Tabela 1.: Statistički pokazatelji debljinske strukture po klasama starosti
Table 1: Statistical characteristics of diameter structures per age classes

Statistical characteristics	Age classes (cm)				
	11-20	21-30	31-40	41-50	51-60
Average	6,25	8,21	12,45	15,48	17,26
Standard deviation	2,80	3,53	5,38	5,79	6,96
Standard error	0,68	1,02	1,70	2,19	2,63
Range	11,30	20,90	22,80	25,90	31,80
Coefficient of variation	45	43	43	37	40
Asymmetry	0,33	0,64	0,15	0,27	0,31
Slope	3,05	4,14	2,75	2,32	2,45
Diameter of middle BA tree	6,85	8,93	13,47	16,53	18,61

3.2 Parametri teorijskih raspodjela

Iako veličine statističkih pokazatelja empirijskih raspodjela nešto odstupaju od uvjeta za primjenu Gaussove, binomne i Poissonove raspodjele, provjerena je uspješnost njihove primjene.

Za definiranje ovih, te Levakovićeve raspodjele, upotrebljeni su proračunati statistički parametri empirijskih raspodjela. Veličine parametara beta raspodjele, proračunate pomoću aritmetičke sredine, varijanse i granica beta funkcije na osi x, date su u tabeli 2.

Tabela 2: Parametri beta funkcije po klasama starosti
Table 2: Parameters of beta function per age classes

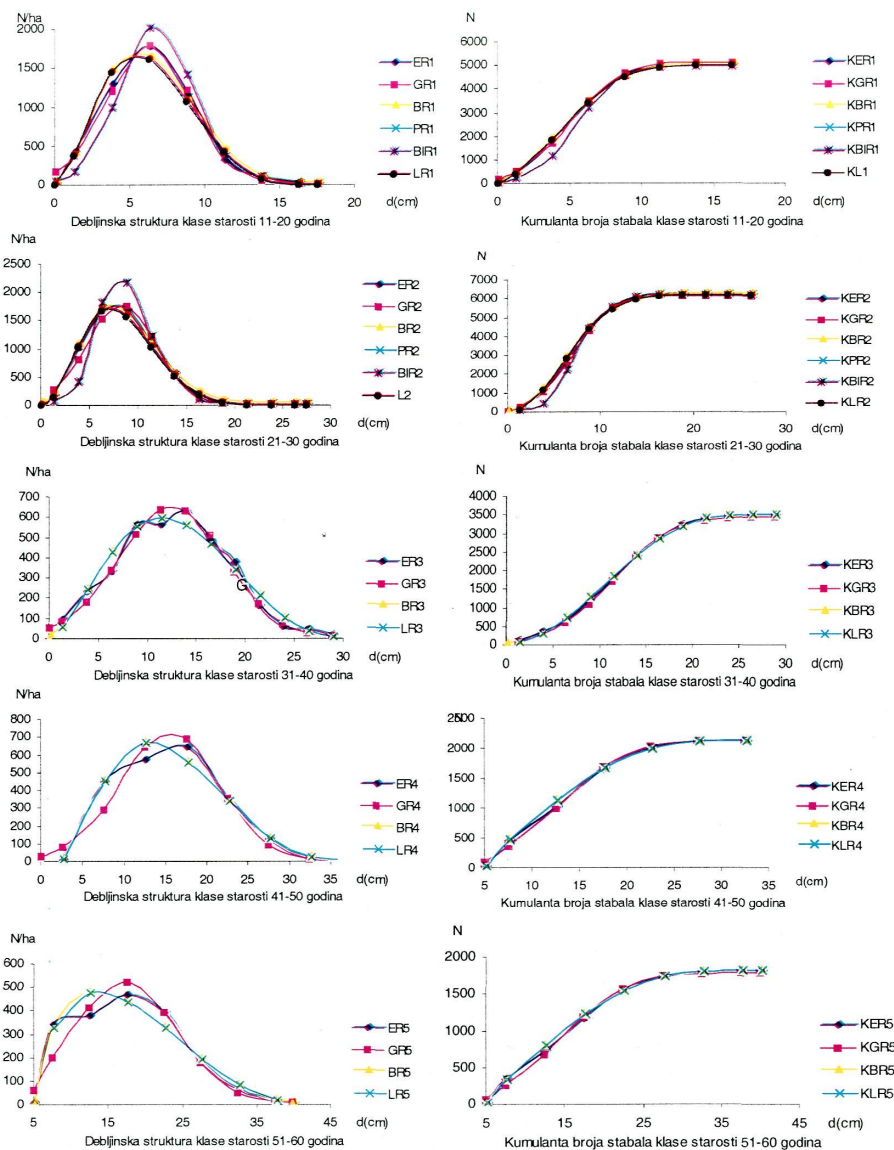
Parameters	Age classes (cm)				
	11-20	21-30	31-40	41-50	51-60
Parameter α	1,8449	2,5009	1,7216	0,7821	0,6648
Parameter γ	4,1174	7,2300	2,8383	2,3187	2,0875
Constants	2,58E-03	4,31E-09	2,21E-03	9,93E-02	1,20E-01

Veličine parametara Levakovićeve raspodjele po klasama starosti, date su u tabeli 3.

Tabela 5: Parametri Levakovićeve funkcije po klasama starosti
Table 5: Parameters of Levaković function per age classes

Parameters	Age classes (cm)				
	11-20	21-30	31-40	41-50	51-60
Parameter c1	1,84	2,50	1,72	0,78	0,66
Parameter c2	4,12	7,23	2,84	2,32	2,09
\bar{K}	5,33	28,23	1,38	0,36	0,24

Na grafiku 2 predstavljene su empirijske i teorijske debljinske strukture jednodobnih sastojina smrce po klasama starosti širine 10 godina, pri čemu su teorijske raspodjele označene sa: GRi=Gaussova, BRI=beta, PRI=Poissonova, BIRi=binomna, LRI=Levakoviceva



Graf. 2: Empirijske i teorijske debljinske strukture jednodobnih sastojina smrce
Fig. 2: Empirical and theoretical breast diameter structures of spruce even-aged stands

Uočava se da se teorijske frekvencije binomne i Poissonove raspodjele, te beta i Levakovićeve raspodjele preklapaju. Kod starosnih klasa iznad 30 godina vidi se da Gaussova i beta, odnosno Levakovićeva raspodjela dobro prate empirijske

raspodjele. Posebno je uočljivo da se kumulante gotovo preklapaju. To ukazuje na pogodnost ovih raspodjela za opis ispitivanih debljinskih struktura.

Rezultati ocijenjeni na osnovu grafičkih prikaza potvrđeni su testiranjem teorijskih frekvencija.

U tabeli 4. date su veličine prosječnih kvadratnih odstupanja teorijskih od empirijskih frekvencija po klasama starosti. Veličine prosječnog kvadratnog odstupanja ukazuju da najbolji rezultat za klasu starosti 11-20 godina daje Gaussova funkcija, dok Poissonova i binomna funkcija znatno odstupaju od empirijske raspodjele. Za klasu starosti 21-30 godina najbolji rezultat daje beta funkcija, uz, opet, znatna odstupanja Poissonove i binomne raspodjele. Dakle, i kod mladih sastojina, Gaussova i beta funkcija daju bolje rezultate. Kod sastojina starijih od 30 godina, beta funkcija se pokazala uspješnom, postižući pri tome mala prosječna kvadratna odstupanja.

Tabela 4.: Prosječna kvadratna odstupanja teorijskih i empirijskih raspodjela po klasama starosti

Table 4: Average square deviations for theoretical and empirical distributions per age classes

Functions	Age classes (cm)				
	11-20	21-30	31-40	41-50	51-60
σ^2 Gauss	3,46	18,67	4,00	15,41	13,42
σ^2 Beta	13,71	3,09	6,77	7,95	8,27
σ^2 Levaković	13,71	3,09	6,77	7,95	8,27
σ^2 Poisson	54,09	106,33			
σ^2 Binomial	54,37	106,71			

Upoređujući vrijednost χ^2 testova i kritičnih tabličnih vrijednosti, datih u tabeli 5., uočava se da ni jedna raspodjela, s tog stanovišta, nije prihvatljiva za opisivanje empirijskih raspodjela debljinskih struktura, ali se također uočava i tendiranje pojedinih teorijskih raspodjela ka uspješnom izravanju empirijskih raspodjela

Tabela 5.: Rezultati χ^2 testa
Table 5: Results of χ^2 test

Functions	Age classes (cm)				
	11-20	21-30	31-40	41-50	51-60
$\chi^2_{0.05,u}$	12,59	14,07	19,68	11,07	12,59
χ^2_{Gauss}	83,15	143,77	60,52	111,88	40,26
χ^2_{Beta}	143,10	125,24	152,90	32,04	115,94
$\chi^2_{\text{Levaković}}$	143,10	125,24	152,90	32,04	115,94
χ^2_{Poisson}	587,80	1492,44			
χ^2_{Binomial}	591,02	1493,10			

Rezultati Kolmogorov-Smirnov testa, dati u tabeli 6., ukazuju da se kumulativnim Gaussovom i beta funkcijama, odnosno Levakovićevom funkcijom, mogu uspješno opisati debljinske strukture zasada smrče klasa starosti 21-30 i 31- 40 godina.

Tabela 6.: Rezultati Kolmogorov Smirnov testa
Table 6: Results of Kolmogorov-Smirnov test

Functions	Age classes (cm)				
	11-20	21-30	31-40	41-50	51-60
$d_{n,\alpha}^{\text{criticl}}$	0,024	0,022	0,030	0,038	0,041
$d_{n,\alpha}^{\text{Gauss}}$	0,025	0,041	0,029	0,042	0,042
$d_{n,\alpha}^{\text{Beta}}$	0,027	0,009	0,025	0,046	0,060
$d_{n,\alpha}^{\text{Levakovic}}$	0,027	0,009	0,025	0,046	0,060
$d_{n,\alpha}^{\text{Poisson}}$	0,110	0,110			
$d_{n,\alpha}^{\text{Binomial}}$	0,100	0,110			

4. Diskusija

U radu je provjerena uspješnost primjene pogodnih teorijskih raspodjela pri opisu debljinske strukture jednodobnih sastojina smrče godina u Bosni i Hercegovini, starosti do 60.

Analiza empirijske debljinske strukture jednodobnih sastojina smrče ukazuje da se javljaju raspodjele broja stabala po debljinskim stupnjevima sa tendencijom zvonolike raspodjele različitih oblika. Kod jednodobnih sastojina starosnih klasa do 30 godina javljaju se unimodalne, izdužene raspodjele čiji parametri ukazuju na mogućnost primjene Gaussove, binomne, Poissonove, beta i Levakovićeve raspodjele. Uočljivo je da uvjeti za primjenu binomne i Poissonove raspodjele nisu zadovoljeni, ali im teže, te je primjena ovih raspodjela provjerena.

Kod klasa starosti preko 30 godina javljaju se raspodjele velikih varijacionih širina, te su na ove raspodjele primjenjene teorijske Gaussova, beta i Levakovićeva raspodjela.

Rezultati primjene teorijskih raspodjela dovode do zaključaka da za opis debljinskih struktura svih klasa starosti najbolje rezultate daju Gaussova, beta i Levakovićeva raspodjele, dok su evidentna znatna odstupanja binomne i Poissonove raspodjele, pri opisu debljinskih struktura mladih jednodobnih sastojina. Zbog ovakvih rezultata ove raspodjele imaju manji značaj za opis stvarnih raspodjela. Uz to, Poissonova raspodjela preklapa binomnu, kao njen granični slučaj.

Takode se uočava da aplicirana Levakovićeva raspodjela preklapa beta raspodjelu. Razlog tome je što je Levakovićev analitički oblik raspodjele kao i beta funkcija izvedena iz Eulerovog integrala prve vrste. Razlika između ovih raspodjela je u njihovom analitičkom izrazu i načinu određivanja.

Analiza grafičkih prikaza raspodjela pokazuje visok stupanj podudarnosti

između empirijskih, Gaussovih, beta i Levakovićevih raspodjela. Uočava se da Gaussova raspodjela daje veći broj stabla prosječne veličine od stvarnog. Vizuelno je uočljiv visok stupanj podudarnosti kod kumulativnih raspodjela i to za sve klase starosti.

Rezultati χ^2 i Kolmogorov Smirnov testova ukazuju da se debljinske strukture klasa starosti 21-30 i 31-40 godina, mogu uspješno opisati kumulativnim beta ili Levakovićevom i Gaussovom raspodjelom, dok kod ostalih klasa starosti jednodobnih sastojina smrče daju lošije rezultate.

Dakle, teorijske raspodjele koje daju najbolje rezultate za opisivanje debljinske strukture u jednodobnih sastojina smrče su beta i Gaussova raspodjela.

Literatura:

1. Adams, A., Bloomfield, D., Booth, P., England, P. (1995): Investment mathematics and statistics. Kluwer Law International. United Kindom. p. 177-193.
2. Hren, V. (1979): Podesnost Levakovićeve funkcije za izražavanje i praćenje razvoja sastojinske strukture. Radovi br. 36, Zagreb, 79 pp.
3. Kovačić, Đ. (1981): Raspodjela ucestalosti broja stabala i drvne mase u nekim prirodnim sastojinama hrasta lužnjaka kao mjere unapređenja proizvodnje, Doktorska teza, Zagreb, 479.
4. Kružić, T. (1991): Simuliranje sadašnje i buduće distribucije prsnih promjera. Šumarski list CXV (1-2): 56-62.
5. Levaković, A. (1935): Analitički oblik zakona rastenja. Glasnik za šumske pokuse. Zagreb.
6. Levaković, A. (1938): Fiziološko-dinamički osnovi funkcija rastenja. Glasnik za šumske pokuse. Zagreb.
7. Levaković, A. (1948): O analitičkom izražavanju sastojinske strukture. Glasnik za šumske pokuse. Zagreb.
8. Lonnroth, E. (1925): Untersuchung uber die innere Struktur und Entwicklung gleichaltiger naturnomaler Kieferbestande, Acta forestalia vennicia, Helsinki.
9. Lukić, N., Pranjić, A. (1997): Izmjera šuma. Udžbenici Sveučilišta u Zagrebu. Zagreb.
10. Matić, V. (1974): Prirast i prinos šuma. Udžbenik. Univerzitet u Sarajevu
11. Mirković, D., Banković, S. (1993): Dendrometrija. Udžbenik: Univerzitet u Beogradu. Zavod za udbenike i nastavna sredstva Srbije, Beograd.
12. Pavlič J., Stojanović, O., Koprivica, M., Prolić, N. (1988): Metodika prikupljanja podataka na privremenim oglednim plohama za izradu prinosno-prihodnih tablica jednodobnih zasada smrče, bijelog bora i crnog bora na karbonatnim i silikatnim supstratima u BiH. Zavod za planiranje i ekonomiku u šumarstvu. Šumarski fakultet u Sarajevu.
13. Peltz, D.R. (1999): Forstliche Biometrie. Institute für Forstliche Biometrie. Freiburg.
14. Zar, J.H. (1996): Biostatistical analysis. Prentice-Hall International, Inc.

Summary

Diameter structures of spruce plantations in Bosnia-Herzegovina, distributed in 10 years wide age classes, tend to have bell-shaped distribution of different forms. Analysing an application of the theoretical distributions on description of empirical diameter structures, it is pointed out that it appears differences between the Gaussian, the binomial, the Poisson, the beta and the Levakovic distribution. The best results were achieved using the Gaussian and the beta distribution. Even, in young spruce plantation, these distributions give better results than the Poisson and the binomial ones, although there appear leptocurtic distributions. Besides, the Poisson distribution folds over the binomial as its limited case. Also, it is evident that applied the Levakovic function gives the same results as the beta function, what confirms an assumption that Levakovic function is a modified beta function.

Results of χ^2 and Kolmogorov-Smirnov tests demonstrate certain differences of fitness for Gaussian, beta and Levakovic distributions for all ages. A good suitability of these distributions is evident for cumulative Gaussian and beta distributions, especially for 21-30 and 31-40 age classes.

In conclusion, the Gaussian and beta functions give the best results for determination of diameter structures of spruce plantations in Bosnia and Herzegovina in the age 10-60 years.