

MATEMATIČKI IZRAZ ZA LOGIČKO-GRAFIČKI IZRAVNATU KRIVU LINIJU

Mathematical formula for logical-graphically equated curve line

Lojo Ahmet

Šumarski fakultet Sarajevo

Abstract

Many functions of the growth used in the forestry science and practice do not have mathematical formula and the functions are equated on a logical-graphically way. The volume tables for the silver-fir (*Abies alba* Mill.) based on five quality classes and prepared on that way (Matić, 1963) are still in use in forest practice in Bosnia. To establish the value of parameters for the growth functions PC program Microsoft Excel may be used, thus enabling easier calculation of data in forest inventory.

Key words: *Abies alba*, curve of height, growth function, mathematical formula

1. Uvod

Mnoge prirodne zakonitosti predstavljaju se grafički i obično se razmatraju u zavisnosti od neke druge nezavisne mjerljive veličine. Prirodne zakonitosti, koje grafički predstavljene najčešće nemaju pravolinijski već krivolinijski tok, su često logički jasne i nepromjenjive (promjenjive su samo njihove apsolutne veličine). U šumarstvu takvih primjera ima mnogo, a najpoznatiji su oni o rastu i prirastu stabala i sastojina u zavisnosti od starosti (ili nekog drugog nezavisnog taksacionog elementa), kao što su "visinske bonitetne" krive.

Za visoke raznodobne šume jele, smrče i bukve u Bosni i Hercegovini izradene su tablice taksacionih elemenata (Matić et al., 1963), a u okviru njih i visinske bonitetne krive za ove vrste drveća. U njima su date pojedinačne vrijednosti visina stabala u zavisnosti od prsnog prečnika, ali ne i matematički izrazi izravnatih krivih linija.

Medutim, teško je odrediti matematički izraz funkcije koji bi bio pogodan za predstavljanje zakonitosti rasta u visinu i za izravnavanje metodom najmanjih kvadrata. Osim toga funkcija ne smije biti ni previše kruta ni previše plastična, već mora odražavati logički tok rasta u visinu. U dosadašnjim istraživanjima na ovu temu (Levaković, 1935, Mihajov, 1947/48, Prodan, 1965, Pranjčić, 1970, Ljubović, 1998), ponuđeno je nekoliko matematičkih izraza koji su pogodni, ali i oni zahtijevaju

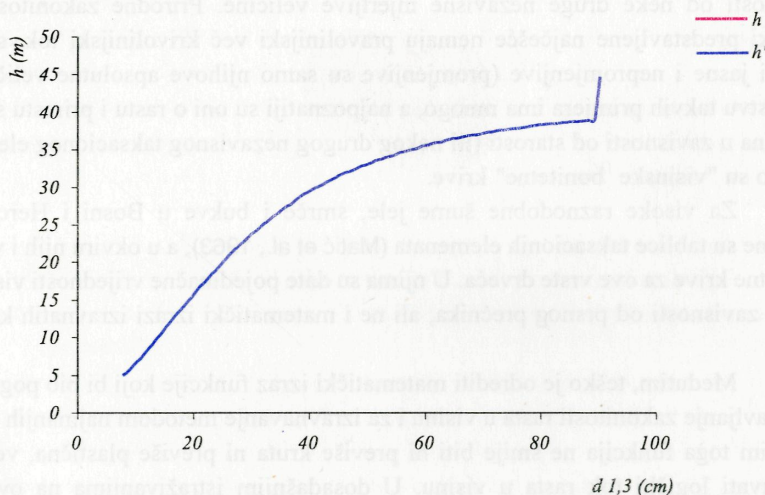
idealno, uzorak prirodnog skupa da bi se dobilo zadovoljavajuće rješenje. Problem je još složeniji kada treba izravnati snop visinskih bonitetnih krivih, čije se, neovisne, logičke zakonitosti također moraju poštovati. Zbog toga se u prošlosti vrlo često primjenjivao grafičko-računski način izravnavanja ovih krivih linija, sa kojih su se direktno mogli očitavati podaci. Međutim, ove krive nemaju svoj matematički izraz koji bi omogućio dobijanje vrijednosti visina za pojedine nezavisno promjenjive varijable (prsni prečnik ili starost). Pri korištenju računara, i pripremi kvalitetnih programa za obradu podataka prikupljenih na terenu, ovaj nedostatak je još izraženiji, zbog čega je značajno da se pored tabela ima i matematički izraz posmatranih zakonitosti.

2. Zadatak i metod rada

Zadatak ovog rada je da se odredi matematički izraz za visinsku krivu jele prvog bonitetnog razreda, koja predstavlja zavisnost visine stabala od prsnog prečnika i da se, istovremeno, utvrdi metod kojim je moguće dobiti matematički izraz za druge grafičko-računski izravnate krive linije.

Za rješavanje ovog zadatka korištene su neke funkcije složenog računarskog programa Microsoft Excel, posebno statistički alat "Trendline" koji se obično koristi za regresionu obradu podataka u jednostavnoj korelaciji, tj. kada se razmatra uticaj jedne nezavisno promjenjive na zavisnu varijablu.

Prvi korak: u radni prostor Excel stranice unose se parovi podataka. U ovom slučaju u kolonu A unesen je prečnik "d" kao nezavisna varijabla, a u kolonu B visina "h" kao zavisna varijabla. Zatim se u kolonu C još jednom upišu podaci o visinama (kopira se kolona B), s tim što se jedan podatak (bilo koji) promijeni da bi se dvije serije podataka mogle razlikovati na grafikonu (na primjer, za prečnik 90 cm u koloni B upisan je broj 39,4 a u koloni C broj 45 (podaci su uzeti iz gore pomenutih zapreminskih tarifa za jelu I - boniteta).



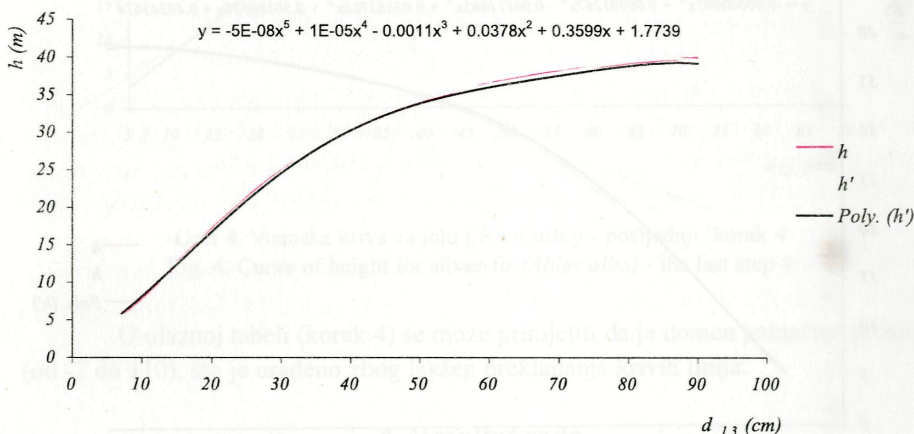
Graf 1. Visinska kriva za jelu (*Abies alba*) - korak 1

Fig. 1. Curve of height for silver-fir (*Abies alba*) - step 1

Drugi korak: markiraju se (boldiraju) sve tri kolone i odabere ikona *Chart Wizard*. Na ekranu će se pojaviti četiri dijalog boxa za definisanje željenih opcija. U prvom dijalog boxu odabere se opcija *XY (Scatter)* a u drugom grafički prikaz (najpogodniji oblik za naš zadatak je opcija *smoothed line*, jer će pojedinačni podaci biti predstavljeni neprekidnom krivom linijom). U trećem dijalog boxu upišu se nazivi za ordinatu i apscisu kao i naslov grafikona. Ovim je, praktično, grafikon već gotov. Oblik i veličina slova i grafikona se naknadno mogu mijenjati prema željenom izgledu.

Slika bi trebalo da izgleda kao na grafikonu 1, gdje je prva serija podataka predstavljena crvenom linijom (njen položaj treba da ostane nepromjenjiv), dok je druga serija podataka prikazana plavom linijom i "pokriva" prvu seriju, osim na samom kraju gdje su veličine različite (39,4, odnosno 45) upravo da bi se dvije serije podataka razlikovale.

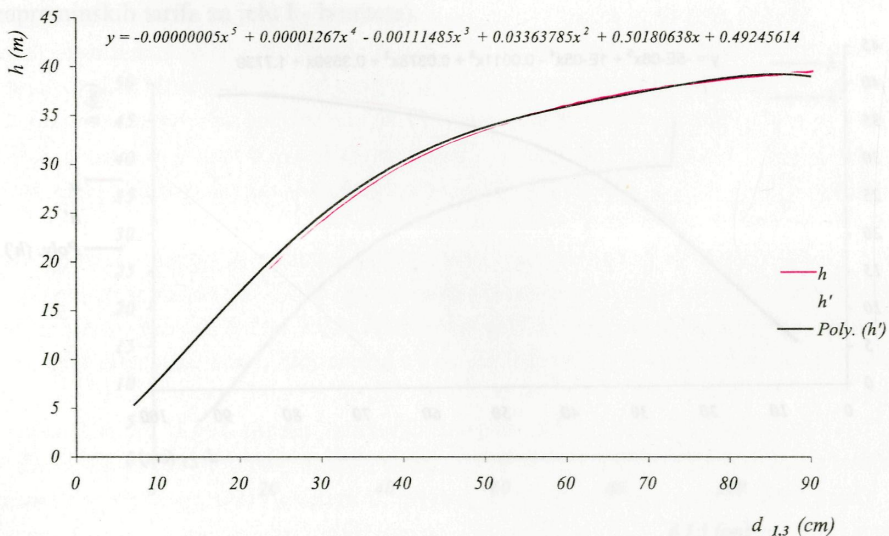
Treći korak: izravnanje druge serije regresijom da bi se dobila kriva linija koja ima matematički izraz. Postupak je slijedeći: strelicom miša kliknuti na gornji kraj crvene linije i pojaviti će se serija kvadratića. Na komandnoj liniji Excel-a otvoriti opciju *Chart*, i birati opciju *Add trendline*. Na ekranu će se pojaviti dijalog box koji se sastoji od tri stranice: *patterns*, *type* i *options*. Na stranici *patterns* bira se željena boja i najtanja linija. Na stranici *type* bira se tip linije izravnanja. Da bi izbor bio pravilan mora se znati koja od ponuđenih funkcija može imati oblik visinske krive. Izabere se polinom višeg reda (u našem slučaju, na primjer, polinom 5-tog reda koji u potpunosti zadovoljava zahtjeve oblika visinske krive). Zatim se na stranici *options* strelicom miša popuni kvadratić pored kog piše "*Display equation on chart*", čime se na grafikonu dobije matematički izraz linije izravnanja serije "h".



Graf 2. Visinska kriva za jelu (*Abies alba*) - korak 2
Fig. 2. Curve of height for silver-fir (*Abies alba*) - step 2

Dobiće se grafikon sa dvije serije podataka kao i na grafikonu 1. sa još jednom linijom (Poly. h') koja je linija izravnanja serije " h' " i njen matematički izraz. Tabela sa ulaznim podacima ostaje ista, s tim što se posljednja vrijednost za prečnik 90 cm u koloni " h' " vrati na vrijednost 39,4. Time su ponovo izjednačene obje serije podataka.

Da bi se dobila jasnija predstava, na grafikonu treba da ostane samo linija podataka serije "h" i linija izravnanja serije " h' " (Poly. h'). Linija koja predstavlja seriju podataka " h' " učiniti će se nevidljivom tako što se ona označi na grafikonu strelicom miša, a zatim na komandnoj liniji Excel-a izabere opcija *Format*, i u njoj opcija *Selected Data Series*. Pojaviće se dijalog box sa nekoliko stranica. Prva otvorena je *patterns*, u kojoj se u dijelu line, strelicom miša popuni kružić kod opcije *None*, čime druga serija podataka postaje nevidljiva na grafikonu, što ne znači da je obrisana (njena linija izravnanja ostaje na grafikonu). Tako je formiran grafikon 2, u kojem se kriva izravnanja ne poklapa u potpunosti sa serijom podataka "h", što je krajnji cilj. Linije se ne poklapaju jer je i polinom 5-tog reda previše krut da bi se u potpunosti priklonio podacima koje izravnava. Ove dvije linije se moraju u potpunosti poklopiti, jer serija "h" u stvari predstavlja grafički izravnatu visinsku krivu jele I-og bonitetnog razreda, što program Ms Excel omogućava. Ključ je u interaktivnoj povezanosti ulazne tabele i grafikona, tj. aktivnoj povezanosti podataka iz tabele sa linijama na grafikonu. Ako se promijeni bilo koji broj u ulaznim podacima odraziće se to i na grafikonu, tj. na serijama podataka, kao i na liniju izravnanja i njenom matematičkom izrazu. To svojstvo ovog savremenog statističkog alata omogućava da se "poteže" linija izravnanja mijenjanjem podataka u njenoj seriji "h'", kako bi se ona poklopila sa serijom podataka h. Rezultat tog mijenjanja podataka u tabeli odmah se očituje na grafikonu.



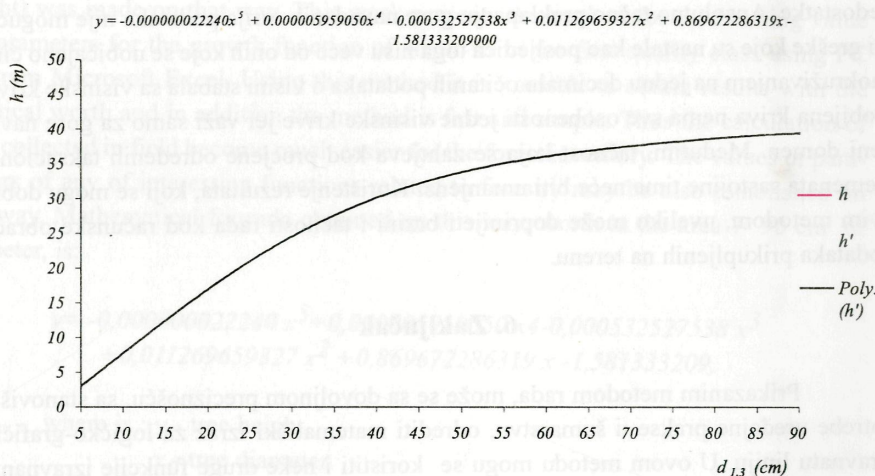
Graf 3. Visinska kriva za jelu (*Abies alba*) - korak 3
Fig. 3. Curve of height for silver-fir (*Abies alba*) - step 3

Na grafikonu 2 se vidi da linija izravnjanja u potpunosti ne preklapa seriju "h" koja je u crvenoj boji dok je linija izravnjanja (Poly. h') crna. Prvo se pokuša poklopiti lijevi krak linije.

U grafikonu 3 se vidi da je lijevi krak linije izravnjanja (Poly. h') dobro preklapio podatke serije "h", što je urađeno mijenjanjem pojedinih podataka u ulaznoj tabeli u seriji "h'". Ti podaci su u sivim poljima ulazne tabele (korak 2). Ostatak serije ostao je isti.

Preostalo preklapanje radi se na isti način i na desnom kraku linije izravnjanja, pa zatim u sredini. Ovakav redosljed nije neko pravilo. Promjene na jednom kraju linije izravnjanja prenose se i na druge njene dijelove tako da je stalno potrebno vršiti nove korekcije na već izravnatim dijelovima krive linije sve dok se linija izravnjanja u potpunosti ne poklopi sa serijom podataka "h".

Na ovaj način, mijenjajući podatke u ulaznoj tabeli, formira se lažni skup parova podataka čijom se regresijom dobija jednačina izravnjanja, koja daje izračunate vrijednosti visina stabala jele za određeni prsni prečnik, onakve kakve su već date u pomenutim tablicama. Na kraju rada grafikon bi trebalo da izgleda kao na grafikonu 4.



Graf 4. Visinska kriva za jelu (*Abies alba*) - posljednji korak 4

Fig. 4. Curve of height for silver-fir (*Abies alba*) - the last step 4

U ulaznoj tabeli (korak 4) se može primjetiti da je domen jednačine proširen (od -2 do 110), što je urađeno zbog lakšeg preklapanja krivih linija.

4. Rezultat rada

Rezultat rada predstavlja grafikon 4. Na njemu se uočava samo kriva regresiona linija crne boje koja u potpunosti prekriva crvenu liniju serije tabelarnih podata-

ka vrijednosti visina za pojedine prsne prečnike. Na grafikonu se može vidjeti i matematički izraz regresione krive linije koji je i bio cilj zadatka. Broj decimalnih mjesta u regresionoj jednačini se može zadati, u ovom slučaju to je 12. Taj izraz glasi:

$$y = -0,000000022240 x^5 + 0,000005959050 x^4 - 0,000532527538 x^3 + 0,011269659327 x^2 + 0,869672286319 x - 1,581333209,$$

gdje je: y - visina stabla,

x - prečnik na prsnoj visini stabla.

Ova jednačina vrijedi samo za razmatrani domen tj. od 7 do 90 cm debljine na prsnoj visini. Suma reziduala između serije podataka " h " i izračunatih vrijednosti, što je sasvim zadovoljavajuće, iznosi:

$$\sum R = 0,201 \text{ m}, \sum R^2 = 0,48$$

5. Diskusija

Izloženi metod rada određivanja matematičkog izraza svakako da ima svoje nedostatke. Apsolutno tačno preklapanje gore navedenih serija podataka nije moguće, ali greške koje su nastale kao posljedica toga nisu veće od onih koje se uobičajeno čine zaokruživanjem na jednu decimalu očitanih podataka o visini stabala sa visinske krive. Dobijena kriva nema sve osobenosti jedne visinske krive jer važi samo za gore navedeni domen. Međutim, tačnost koja se zahtjeva kod procjene određenih taksacionih elemenata sastojine time neće biti umanjena. Korištenje rezultata, koji se mogu dobiti ovim metodom, uveliko može doprinijeti brzini i tačnosti rada kod računске obrade podataka prikupljenih na terenu.

6. Zaključak

Prikazanim metodom rada, može se sa dovoljnom preciznošću, sa stanovišta potrebe uređajne prakse u šumarstvu, odrediti matematički izraz za logičko-grafički izravnatu liniju. U ovom metodu mogu se koristiti i neke druge funkcije izravnjanja osim polinoma 4., 5. i višeg reda, ovisno o prirodnoj zakonitosti koja se istražuje. Ako bi se izravnavale zapreminske bonitetne krive linije, tj. već postojeći "tarifni nizovi" rezultat bi bio od veće praktične važnosti nego je to jednačina visinske krive za neki bonitetni razred. Sama jednostavnost prikazanog postupka, kao i vrijednost dobijenog rezultata govori u prilog osnovanosti njegove primjene.

Literatura

1. Levaković, A. (1935): Analitički izraz za sastojinsku visinsku krivulju. Glasnik za šumske pokuse, Zagreb.
2. Ljubović, Č. (1998): Izbor najpogodnije funkcije rasta i određivanje vrijednosti njenih para

- metara. Radovi šumarskog fakulteta Univerziteta u Sarajevu, Sarajevo
3. Matić, V. (1959): Taksacioni elementi prebornih šuma jele smrče i bukve na području Bosne. Radovi šumarskog fakulteta i Instituta za šumarstvo i drvnu industriju u Sarajevu, god. IV, br. 4, Sarajevo.
 4. Matić, V. et al. (1963): Tablice taksacionih elemenata visokih šuma jele, smrče, bukve, bijelog bora, crnog bora i hrasta kitnjaka na području Bosne. Šumarski fakultet i Institut za šumarstvo i drvnu industriju u Sarajevu, Sarajevo.
 5. Mihajlov, I. (1947/48): Matematičko formuliranje na zakonat za rastenjeto na šumskite drva i rasadi. Goz. Zbornik na Zemljod. šumarski fakultet, Skopje.
 6. Pranjić, A. (1970): Sastojinske visinske krivulje hrasta lužnjaka. Šumarski list 94 (7-8), Zagreb.
 7. Prodan, M. (1965): Holzmesslehre. Frankfurt am Mn.

Summary

Many of used functions of the growth in the forestry science and practice do not have mathematical formula and the functions are commonly equal on the logical-graphical way. The volume table for the silver-fir (*Abies alba* Mill.) in Bosnia, prepared by Matić (1963) which is based on five quality classes (contains five quality curves of height) was made on that way. This work presents the method for establishing value of parameters for the growth function of silver-fir in the first quality class using PC program Microsoft Excel. Using this method it is possible to obtain results with the practical worth and in addition the method is fast and simple. Thus the calculation of data collected in field become much easier for the forest inventory. The values of parameters of any of interesting functions related to forestry may be also established on this way. Mathematical formula obtained on this way, worth in the area 7- 90 cm of diameter, is:

$$y = -0,000000022240 x^5 + 0,000005959050 x^4 - 0,000532527538 x^3 + 0,011269659327 x^2 + 0,869672286319 x - 1,581333209,$$

where is : y - tree height,
 x - tree diameter.

PRILOG (ANEX)

Ulazna tabela podataka o prečnicima i visinama stabala jele u Bosni
 Input table of the data related to diameter and height of the silver-fir in Bosnia

Diam. <i>d</i> cm	Height <i>h</i> m	1. step	2. step	4. step	Diam. <i>d</i> cm	Height <i>h</i> m	1. step	2. step	4. step
		<i>h'</i>	<i>h'</i>	<i>h'</i>			<i>h'</i>	<i>h'</i>	
-2				4	51	34	34	34	26.8
3				1	52	34.2	34.2	34.2	29.6
5			13.7		53	34.5	34.5	34.5	31.7
8	6.2	6.2	6.4		54	34.7	34.7	34.7	31.9
9	7	7	3	6	55	35	35	35	27.9
10	7.8	7.8	7.2	-1	56	35.2	35.2	35.2	30
11	8.7	8.7	3.2	3	57	35.4	35.4	35.4	30
12	9.6	9.6	4.3	3.8	58	35.6	35.6	35.6	35.6
13	10.6	10.6	7	6	59	35.9	35.9	35.9	35.9
14	11.4	11.4	11.4	9.8	60	36	36	36	36
15	12.5	12.5	10.5	11.6	61	36.3	36.3	36.3	36.3
16	13.4	13.4	15	15	62	36.4	36.4	36.4	38
17	14.3	14.3	20	16	63	36.6	36.6	36.6	38
18	15.1	15.1	20	16	64	36.8	36.8	36.8	36.8
19	16	16	18.5	16	65	36.9	36.9	36.9	39
20	17	17	18.5	17	66	37.1	37.1	37.1	41
21	17.8	17.8	18.3	18	67	37.25	37.25	37.25	42
22	18.6	18.6	18.6	19	68	37.4	37.4	37.4	42
23	19.4	19.4	19.4	20	69	37.5	37.5	37.5	42.3
24	20.2	20.2	20.2	21	70	37.6	37.6	37.6	42.3
25	21.1	21.1	21.1	23.1	71	37.7	37.7	37.7	41.6
26	21.9	21.9	21.9	23.1	72	37.9	37.9	37.9	40.4
27	22.6	22.6	22.6	24.1	73	38	38	38	39.5
28	23.3	23.3	23.3	25.1	74	38.1	38.1	38.1	38.5
29	24	24	24	26.1	75	38.2	38.2	38.2	38.5
30	24.6	24.6	24.6	29.2	76	38.3	38.3	38.3	38.3
31	25.3	25.3	25.3	29.1	77	38.4	38.4	38.4	38.4
32	25.9	25.9	25.9	30.4	78	38.5	38.5	38.5	39
33	26.5	26.5	26.5	33.2	79	38.6	38.6	38.6	39.5
34	27.1	27.1	27.1	33.5	80	38.7	38.7	38.7	42
35	27.7	27.7	27.7	33.1	81	38.8	38.8	38.8	40.2
36	28.2	28.2	28.2	32.5	82	38.85	38.85	38.85	38.85
37	28.8	28.8	28.8	33.1	83	38.9	38.9	38.9	38.9
38	29.3	29.3	29.3	30	84	39	39	39	39
39	29.8	29.8	29.8	29.8	85	39.1	39.1	39.1	38.5
40	30.2	30.2	30.2	30.2	86	39.1	39.1	39.1	38
41	30.6	30.6	30.6	30.6	88				37
42	31	31	31	31	90	39.4	45	39.4	
43	31.4	31.4	31.4	31.4	100				28.8
44	31.8	31.8	31.8	30	105				33.5
45	32.2	32.2	32.2	28	110				43.8
46	32.5	32.5	32.5	29					
47	32.8	32.8	32.8	29					
48	33.1	33.1	33.1	29					
49	33.4	33.4	33.4	28.3					
50	33.7	33.7	33.7	24.7					