Works of the Faculty of Forestry
University of Sarajevo
No 1, 1998 (127-142)

IZBOR NAJPOGODNIJE FUNKCIJE RASTA I ODREĐIVANJE VRIJEDNOSTI NJENIH PARAMETARA

Selection of the most efficient function of growth and establishing the values of its parameters

Ljubović Ćamila

Abstract

Mathematical analysis of a few commonly used functions of growth and thus obtained functions of current and average increment are presented here. On the basis of their geometrical features it has been estimated which of them could present the function of the growth and what conditions satisfied the parameters. It is suggested the idea to establish value of parameters in cases that the least squared method is too complicated system of equations.

K e y w o r d s: Growth function, function of current increment, function of average increment, Seidel, Breymann, Prodan, Levaković, Sept, Mitscherlich, Mihajlov.

1. Uvod

Neposredno prije agresije na BiH, koristeći kompjutersku opremu koju je Fakultet tada imao, u sklopu istraživačkog zadatka "Utvrđivanje strukturnih i proizvodnih karakteristika jednodobnih zasada bijelog bora i crnog bora na karbonatnim supstratima u Bosni i Hercegovini" (DC VII "Multifunkcionalne vrijednosti šumskih ekosistema i njihova zaštita"), vršena je i obrada (izravnanje) velikog broja izmjerenih podataka o visinama stabala bijelog i crnog bora u zavisnosti od starosti, s ciljem da se za područje BiH izrade odgovarajuće tablice za procjenu bonitetnog razreda staništa jednodobnih zasada tih vrsta drveća – bonitetne tablice. Za izravnanja je sa zadovoljavajućim rezultatima korištena Prodanova funkcija rasta

$$r(x) = \frac{x^2}{a + bx + cx^2}, \quad (x > 0 \text{ starost stabla}).$$

Koeficijenti a, b i c određeni su metodom najmanjih kvadrata primijenjenim na funkciju

$$\frac{x^2}{r(x)} = a + bx + cx^2.$$

Uporedo s funkcijom rasta, pokušavali smo izravnanjima podataka odrediti i najpogodnije funkcije tekućeg prirasta $t(x)$ i prosječnog prirasta $p(x)$, ali ovaj posao nije završen, jer su istraživanja prekinuta ratom u BiH. Razmišljajući o idejama i problemima koji su se pri tome javljali, odlučila sam da pokušam teoretski obraditi slijedeća dva problema:

1) Odabrati pogodnu funkciju rasta, takvu da i funkcije tekućeg i prosječnog prirasta matematički dobivene iz te funkcije imaju željene geometrijske osobine. Ukoliko se, provjeravajući ovako dobivene rezultate na podacima dobivenim mjerenjem, pokaže da su kod sve tri funkcije odstupanja od tih podataka relativno mala, ubuduće bi bilo dovoljno mjeriti i izravnanjima rezultata mjerenja odrediti samo jednu od ove tri funkcije, a ostale dvije izračunati jednostavnim matematskim operacijama.

2) Predložiti najjednostavniji način za određivanje parametara ovih funkcija, vodeći računa o geometrijskoj interpretaciji tih parametara. Na većinu predloženih funkcija rasta, odnosno prirasta ne može se direktno primijeniti metod najmanjih kvadrata za određivanje parametara, jer se sistem jednadžbi sa nepoznatim parametrima dobiven na taj način ne može lahko riješiti. Najčešće se predložena funkcija prvo transformira na neki pogodan način, kao što smo mi u pomenutim istraživanjima transformirali Prodanovu funkciju, ali ni to nije uvijek moguće, a osim toga povlači sistematsku grešku (3). Parametri predložene funkcije, ili bar neki od njih, mogli bi se odrediti direktno iz rezultata dobovenih mjerenjm u nekim karakterističnim tačkama grafika (visina asimptote, ekstremi i prevojne tačke i sl.). Za određivanje parametara koje na ovaj način ne bi mogli dobiti, mogao bi se opet primijeniti metod najmanjih kvadrata, koji bi u tom slučaju vodio do sistema jednadžbi sa manjim brojem nepoznatih, pa prema tome i jednostavnijeg.

Vodeći računa o oba ova problema, analiziraćemo izvjestan broj funkcija, koje su korištene kao funkcije rasta.

2. Funkcije rasta, tekućeg i prosječnog prirasta

Prirast je povećanje bilo kojeg taksacionog elementa (visine, drvne mase, promjera, kružnog presjeka itd.) stabla, odnosno sastojine u određenom periodu od jedne ili više godina.

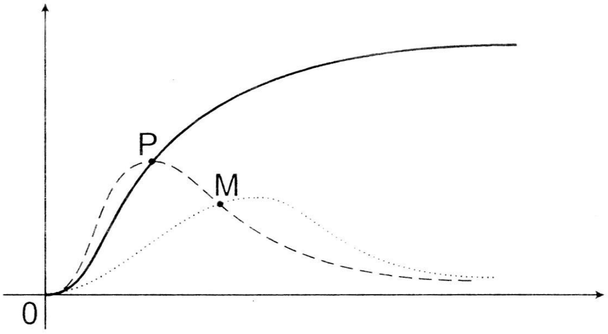
Najveći praktični značaj ima srednji tok rastenja skupa stabala iste vrste drveća. Grafički ga možemo izraziti karakterističnom prostom krivuljom (grafikom funkcije) čiji je analitički prikaz

$$y = r(x), \quad x \geq 0$$

gdje je $r(x)$ tzv. funkcija rasta, a x starost stabla.

Oblik grafika funkcije rasta drvne mase i visine (koji je odavno poznat) izrazito liči na izduženo slovo "S" (s-oidna kriva, graf. 1. – puna linija), polazi iz koordinatnog početka tangencijalno (i konveksno) ka osi x. Nakon prevojne tačke P koja je relativno blizu koordinatnog početka savija se konkavno ka x

osi i dalje raste približavajući se horizontalnoj asimptoti na određenoj visini (maksimalnoj visini stabla, odnosno maksimalnoj veličini elementa čiji se rast prati). Tok krivulja rasta promjera i kružnog presjeka istog je oblika, ali je pomjeren desno – počinje od vremena kad je stablo dostiglo visinu od 1,30m (prsnu visinu).



Graf. 1.

Odavno je poznat i oblik grafika funkcija tekućeg i prosječnog prirasta. Grafik *funkcije tekućeg prirasta* (graf. 1. isprekidana linija) definirane sa

$$t(x) = r'(x)$$

polazi iz koordinatnog početka tangencijalno ka x osi, penje se do tačke P (tj. ima maksimum u prevojnoj tački funkcije rasta) prolazeći kroz jednu prevojnu tačku, a zatim opada prolazeći kroz drugu prevojnu tačku i približavajući se x osi kao asimptoti.

Grafik *funkcije prosječnog prirasta* (graf. 1. tačkasta linija) definirane sa

$$p(x) = \frac{r(x)}{x}$$

sličan je grafiku funkcije tekućeg prirasta. Njegov maksimum M je niži i dalji od koordinatnog početka (poklapa se s tačkom presjeka grafika $p(x)$ i $t(x)$). Od tačke O do tačke M je $t(x) > p(x)$, a desno od tačke M je $p(x) > t(x)$ (4).

3. Analiza nekih funkcija rasta

U daljem tekstu ćemo uvijek sa x označavati starost stabla odnosno sastojine, funkciju rasta sa $r(x)$, funkciju tekućeg prirasta sa $t(x)$, a funkciju prosječnog prirasta sa $p(x)$, dodajući im indekse koji asociraju na ime "autora" te funkcije (obično prvo slovo imena). Na graficima ćemo $r(x)$ crtati punom linijom, $t(x)$ isprekidanom, a $p(x)$ tačkastom linijom.

A) Polinomi

Ako je funkcija rasta $r(x)$ polinom koji prolazi kroz koordinatni početak, tada su i tekući i prosječni prirast polinomi stepena za jedan manjeg nego stepen $r(x)$. Polinomi nemaju asimptote, pa ove funkcije nemaju željeni oblik (graf. 1.) naročito za veće starosti. Međutim, primjena metoda najmanjih kvadrata za određivanje parametara u ovom slučaju vodi do sistema linearnih jednadžbi, dakle najjednostavnijeg mogućeg, pa nema potrebe tražiti drugu mogućnost za određivanje parametara ovih funkcija. Polinomi se inače veoma često upotrebljavaju za izravnanja kako ovih, tako i gotovo svih drugih funkcija.

Seidl (1837) (4) je predložio funkciju rasta

$$r_S(x) = bx + cx^2 + dx^3,$$

a Breymann (1852) (4)

$$r_B(x) = cx^2 + dx^3 + dx^4.$$

Analiziraćemo ih da bismo istakli njihove nedostatke i ograničenja kojim podliježu parametri.

Grafik Seidelove funkcije tekućeg prirasta je

$$t_S = r'_S(x) = b + 2cx + 3dx^2,$$

a to je parabola koja za $b \neq 0$ *ne prolazi kroz koordinatni početak*. Ako pretpostavimo da je $t_S(x)$ parabola s maksimumom, (da bar malo liči na $t(x)$ sa graf. 1.), mora biti $d < 0$. Njen maksimum u tački S dobije se za

$$x_{max} = -\frac{c}{3d},$$

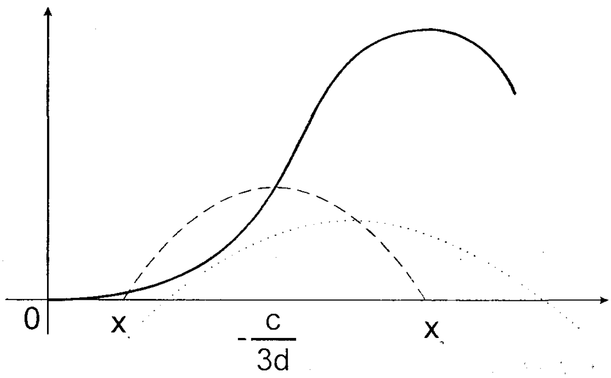
odakle slijedi da je $c > 0$ (jer mora biti $x_{max} > 0$). Kako je $t_S(x) = 0$ za

$$x_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 3bd}}{3d},$$

mora biti $c^2 - 3bd > 0$. Za

$$x > \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 3bd}}{3d},$$

je $t_S(x) < 0$, tj. $r_S(x)$ *počinje da opada*, što je apsurdno.



Graf. 2.

Slična je situacija i sa funkcijom prosječnog prirasta

$$p_S = b + cx + dx^2,$$

samo ta funkcija *postaje negativna* za

$$x > \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4bd}}{2d} > \frac{-c + \sqrt{c^2 - 3bd}}{3d},$$

što je još jedan apsurd (graf. 2).

Seidelova funkcija bi se eventualno mogla primijeniti za stabla, odnosno sastojine manje starosti, ali ne suviše blizu nule.

Breymannova funkcija $r_B(x)$ ima funkciju tekućeg prirasta

$$t_B(x) = r'_B(x) = 2cx + 3dx^2 + 4dx^3$$

za koju je $t_B(0) = 0$, dakle ima jedan nedostatak manje nego $r_S(x)$. Međutim, iz

$$t'_B(x) = 6d + 24dx = 0, \quad \text{za} \quad x = -\frac{1}{4},$$

vidimo da $t_B(x)$ *nema prevojnih tačaka za* $x > 0$. Iz

$$t'_B(x) = 2c + 6dx + 12dx^2 = 0 \quad \text{za} \quad x_{1,2} = \frac{-3d \pm \sqrt{9d^2 - 24cd}}{24d}$$

imamo:

a) $\frac{c}{d} > \frac{3}{8} \Leftarrow 9d^2 - 24cd < 0$, tj. funkcija $t_B(x)$ u tom slučaju nema ekstrema, što se ne može prihvatiti;

b) $\frac{c}{d} = \frac{3}{8} \Leftarrow 9d^2 - 24cd = 0$, kada $t_B(x)$ ima jedan ekstrem, ali za $x = -\frac{1}{4} < 0$, dakle opet neprihvatljivo;

c) $\frac{c}{d} < \frac{3}{8} \Leftarrow 9d^2 - 24cd > 0$, kada za $cd > 0$ ima ekstreme za $x < 0$, a za $cd < 0$ ima jedan ekstrem za $x > 0$. Dakle, c i d moraju biti suprotnog znaka. Iz $t'_B(0) = 2c$ slijedi da je $c > 0$ (ako funkcija desno od koordinatnog početka raste), dakle $d < 0$. Pošto desno od tačke maksimuma nema ekstrema ni prevojnih tačaka, mora presjeći x osu, dakle za

$$x > \frac{-d + \sqrt{d^2 - 4cd}}{2d}$$

imamo $t'_B(x) < 0$, tj. $r_B(x)$ *opada*.

Dakle i ova funkcija se može eventualno primijeniti samo za manje starosti. U blizini koordinatnog početka je nešto bolja nego prethodna.

B) Racionalne funkcije

Kao primjer racionalnih funkcija navešćemo Prodanove (3)

$$r_P(x) = \frac{x^2}{a + bx + cx^2} \quad \text{ili} \quad r_P(x) = \frac{x^3}{a + bx + cx^2 + dx^3},$$

a analiziraćemo samo prvu od njih.

Vidimo da je $r_P(0) = 0$, a iz

$$\lim_{x \to \infty} r_P(x) = \frac{1}{c},$$

zaključujemo da je $c > 0$. *Parametar c bi se mogao iz ovog uslova odrediti direktno, uzimajući da je $\frac{1}{c}$ jednako najvećoj mogućoj vrijednosti funkcije $r_P(x)$.* Uslov $r_P(x) > 0$ za $x > 0$ vodi do ograničenja

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \quad \text{ili} \quad -b + \sqrt{\Delta} < 0.$$

Iz

$$t_P(x) = r'_P(x) = \frac{2ax + bx^2}{(a + bx + cx^2)^2} = 0 \quad \text{za} \quad x = 0 \;\; \text{i} \;\; x = -\frac{2a}{b},$$

slijedi da funkcija tekućeg prirasta prolazi kroz koordinatni početak. Iz uslova $t_P(x) > 0$ za $x > 0$ slijedi $2a + bx > 0$, odakle je $b > 0$ i $-\frac{2a}{b} < 0$, tj. $a > 0$. Iz

$$t'_P(x) = r''_P(x) = \frac{a^2 - 3acx^2 - bcx^3}{(a + bx + cx^2)^3}$$

vidimo da je $t'_P(0) \neq 0$, tj. u koordinatnom početku x osa nije tangenta, što je mali nedostatak ove funkcije.

Funkcija prosječnog prirasta je

$$p_P(x) = \frac{x}{a + bx + cx^2}.$$

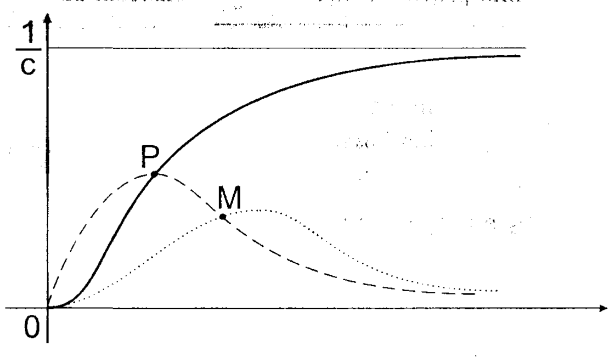
Iz

$$p_P'(x) = \frac{a - cx^2}{(a + bx + cx^2)^2},$$

vidimo da x osa ni za $p_P(x)$ *nije tangenta u koordinatnom početku*, i da $p_P(x)$ ima ekstrem za $x = \sqrt{a/c}$.

Ako su mjereni rezultati za ovu tačku dovoljno pouzdani, uz c određen pomoću najveće vrijednosti funkcije $r_P(x)$, *odavde možemo odrediti vrijednost parametra a. Ostao bi još parametar b koji bi se mogao odrediti koristeći bilo koji dovoljno pouzdan podatak dobiven mjerenjem, ili metodom najmanjih kvadrata, koji se ni za određivanje samo jednog parametra ne može primijeniti direktno, nego opet nakon neke transformacije, npr.*

$$\frac{x^2}{r(x)} = a + bx + cx^2.$$



Graf. 3.

Grafici funkcija $r_P(x)$, $t_P(x)$ i $p_P(x)$ prema Bronstein i Semendjajev (1) dati su na graf. 3.

C) Stepene funkcije

Obradićemo Levakovićevu funkciju (4)

$$r_L(x) = a\left(\frac{x^d}{b + x^d}\right)^c,$$

koja se javlja i u specijalnim oblicima

(i) $c = 1$: $r_L = a\frac{x^d}{b+x^d}$,

(ii) $d = 1$: $r_L(x) = a(\frac{x}{b+x})^c$,

(iii) $c = 1$, $d = 2$: $r_L(x) = a\frac{x^2}{b+x^2}$,

poznata i kao Naslundova.

Jasno, $abcd \neq 0$. Iz $r_L(0) = 0$ slijedi da je $cd > 0$. Kako za $c < 0$ i $d < 0$ imamo

$$r_L(x) = a\left(\frac{x^d}{b + x^d}\right)^{-c} = a(bx^{-d} + 1)^{-c},$$

tj. $r_L(0) \neq 0$, zaključujemo da je $c > 0$ i $d > 0$. Iz $\lim_{x\to\infty} r_L(x) = a$, slijedi da je $y = a$ horizontalna asimptota, dakle $a > 0$. Kao i kod Prodanove funkcije, *ovaj parametar bi se mogao odrediti tako da bude jednak najvećoj mogućoj vrijednosti funkcije* $r_L(x)$. Iz $r_L(x) > 0$ za $x > 0$ slijedi $b > 0$. Iz

$$t_L(x) = r'_L(x) = \frac{bcd}{x(b + x^d)} \cdot r_L(x),$$

zaključujemo da $r_L(x)$ nema ekstrema za $x > 0$ i da je x osa tangenta na funkciju $r_L(x)$ u tački $x = 0$. Takođe vidimo da je $t_L(x) > 0$ i $t_L(x) = 0$. Iz

$$t'_L(x) = r''_L(x) = \frac{bcd}{x^2(b + x^d)^2}(bcd - b - (d+1)x^d)r_L(x)$$

slijedi da funkcija $r_L(x)$ ima prevojnu tačku, a $r'_L(x)$ ekstrem za

$$x = \sqrt[d]{b(cd - 1)/(d + 1)},$$

koja je realna za $cd > 1$, odnosno u specijalnim slučajevima

(i) $x = \sqrt[d]{b(d - 1)/(d + 1)}$,

(ii) $x = b^{\frac{c-1}{2}}$,

(iii) $x = \sqrt{b/3}$.

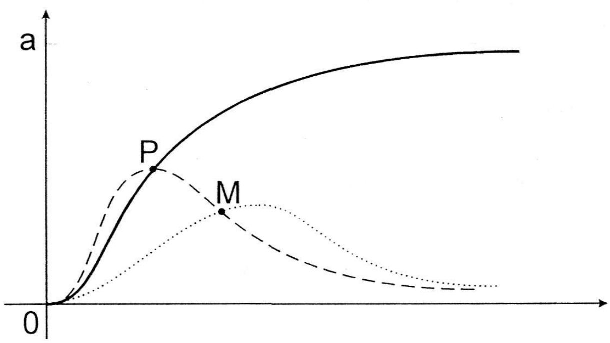
Funkcija $t_L(x) > 0$ za $x > 0$ i x osa joj je asimptota kad $x \to \infty$.

Funkcija prosječnog prirasta

$$p_L(x) = \frac{1}{x} r_L(x)$$

nije definirana za $x = 0$, ali

$$\lim_{x\to 0} p_L(x) = 0.$$



Graf. 4.

Iz

$$p'_L(x) = \frac{r_L(x)}{x^2}\left(\frac{bcd}{b + x^d - 1}\right),$$

zaključujemo da je $p'_L(x) = 0$ za

$$x^d = bcd - b.$$

Kako treba biti $x^d > 0$, zaključujemo opet da je $cd > 1$. U specijalnim slučajevima

(i) $x^d = bd - b$,

(ii) $x = bc - b$,

(iii) $x^2 = b$.

Iz $\lim_{x\to\infty} p_L(x) = 0$ vidimo da je x osa asimptota kad $x \to \infty$.

Grafici ovih funkcija (graf. 5.) imaju željeni oblik. Što se tiče parametara, u općem slučaju ostaje da se odrede tri parametra: b, c i d. U specijalnom slučaju (iii) Naslundove funkcije ostaje samo parametar b koji *možemo odrediti iz uslova* $p'_L(x) = 0$ *ili primijenjujući metod najmanjih kvadrata na funkciju*

$$\frac{ax^2}{r_L(x)} = b + x^2.$$

U slučaju (i) parametri b i d mogu se odrediti metodom najmanjih kvadrata primijenjenim na funkciju

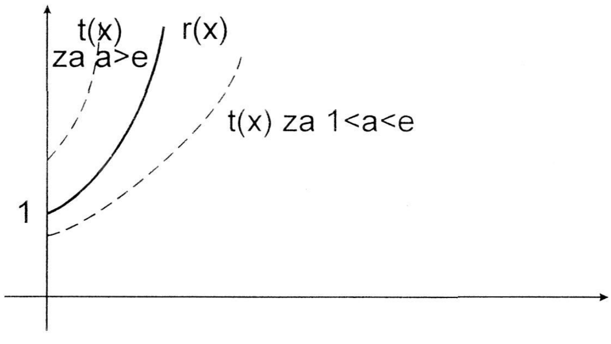
$$\ln\left(\frac{a}{r_L(x)}\right) = B - d\ln x,$$

gdje je $B = \ln b$.

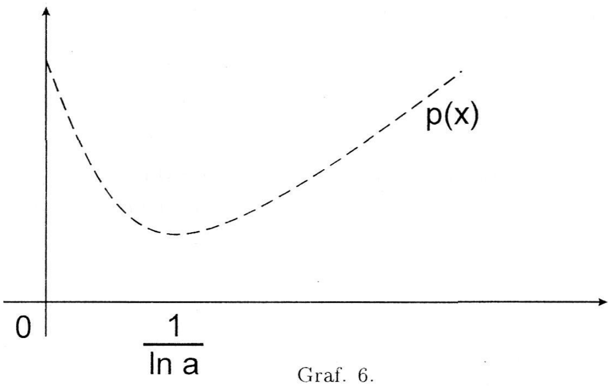
D) Eksponencijalna funkcija

Sept (4) je koristio običnu eksponencijalnu funkciju

$$r(x) = a^x, \quad a > 1,$$



Graf. 5.



Graf. 6.

koja, kao ni funkcije prirasta $t(x) = a^x \ln a$ i $p(x) = a^x/x$ dobivene iz nje, nema gotovo ni jednu od željenih osobina, pa je nećemo ovom prilikom obraditi. Umjesto obrazloženja daćemo samo njihove grafike na grafovima 5 i 6.

Mitscherlich (4) je koristio funkciju

$$r_M(x) = a(1 - e^{-bx})^c.$$

Vidi se da je $r_M(0) \neq 0$ za $c < 0$, dakle mora biti $c > 0$, kada je $r_M(0) = 0$. Isto tako iz $r_M(x) > 0$ za $x > 0$ slijedi da je $ab > 0$. Za $b < 0$ i $a < 0$ je

$$\lim_{x \to \infty} r_M(x) = \pm\infty,$$

pa zaključujemo da je $a > 0$ i $b > 0$. Tada je

$$\lim_{x \to \infty} r_M(x) = a$$

tj. $y = a$ je horizontalna asimptota, dakle *opet se može parametar a odrediti kao najveća moguća vrijednost funkcije rasta.*

Iz

$$t_M(x) = r'_M(x) = bce^{-bx} \cdot r_M(x),$$
$$t'_M(x) = b^2ce^{-bx}(ce^{-bx} - 1)r_M(x)$$

vidimo da $r_M(x)$ ima prevojnu tačku, a $t_M(x)$ maksimum za $x = \frac{1}{b}\ln c$, da je

$$\lim_{x\to\infty} t_M(x) = 0,$$

tj. x osa je horizontalna asimptota funkcije tekućeg prirasta $t_M(x)$ kad $x \to \infty$.

Funkcija prosječnog prirasta

$$p_M(x) = \frac{a}{x}(1 - e^{-bx})^c$$

nije definirana za $x = 0$, ali

$$\lim_{x\to 0} p_M(x) = 0.$$

Kad $x \to \infty$ vidimo da je

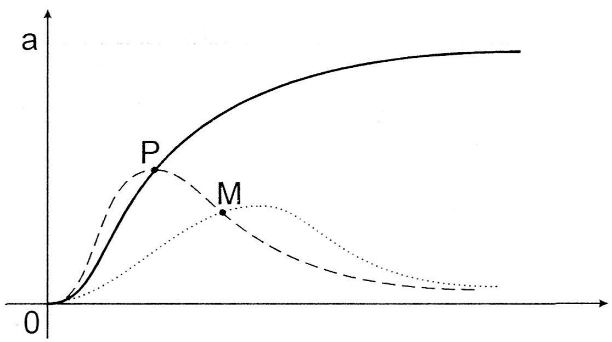
$$\lim_{x\to\infty} p_M(x) = 0.$$

Iz

$$p'_M(x) = (bce^{-bx} - 1)p_M(x),$$

vidimo da $p_M(x)$ ima ekstrem u tački u kojoj je $e^{bx} = bc$, i da je

$$\lim_{x\to 0} p'_M(x) = 0.$$



Graf. 7.

Dakle, grafici sve tri funkcije (graf. 7.) imaju odgovarajući oblik, ali su veoma nepogodne za primjenu metoda najmanjih kvadrata. Parametre b i c mogli bi odrediti koristeći podatke o prevojnoj tački funkcije $r_M(x)$ i ekstremu funkcije $p_M(x)$ (naravno, ako su ti podaci dovoljno pouzdani).

Mihajlov (4) je koristio funkciju

$$r_H(x) = ae^{-b/x^c}$$

odnosno specijalno za $c = 1$

$$r_H(x) = ae^{-b/x}.$$

Jasno, $abc \neq 0$. Za $a < 0$ bi bilo $r_H(x) < 0$ za $x > 0$, dakle $a > 0$. Za

$b < 0$, $c < 0$ je $\lim_{x\to\infty} r_H(x) = \infty$, $r_H(x) = a$,

$b < 0$, $c > 0$ je $\lim_{x\to\infty} r_H(x) = a$, $\lim_{x\to 0} r_H(x) = \infty$,

$b > 0$, $c < 0$ je $\lim_{x\to\infty} r_H(x) = 0$, $r_H(x) = a$,

$b > 0$, $c > 0$ je $\lim_{x\to\infty} r_H(x) = a$, $\lim_{x\to 0} r_H(x) = 0$,

dakle zadovoljavajuća kombinacija je $b > 0$ i $c > 0$. *Opet se može uzeti da je a jednako najvećoj mogućoj vrijednosti funkcije $r_H(x)$.*

Iz

$$t_H(x) = r'_H(x) = \frac{bc}{x^{c+1}} r_H(x)$$

$$t'_H(x) = \frac{bc}{x^{2c+2}} [bc - (c+1)x^c] r_H(x)$$

vidimo da je

$$\lim_{x\to 0} t_H(x) = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to\infty} t_H(x) = 0$$

i da funkcija $r_H(x)$ ima prevojnu tačku, a funkcija $t_H(x)$ ekstrem za $x^c = \frac{bc}{c+1}$.

Za funkciju prosječnog prirasta iz

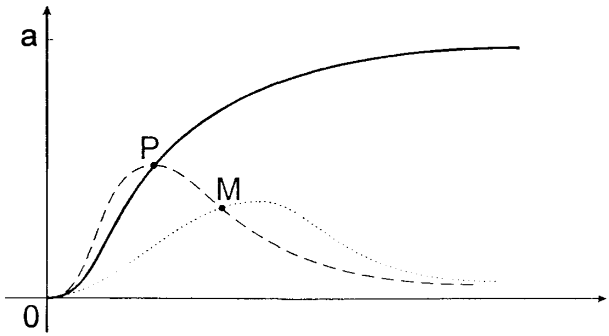
$$p_H(x) = \frac{a}{x} e^{\frac{-b}{x^c}}$$

slijedi

$$\lim_{x\to 0} p_H(x) = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to\infty} p_H(x) = 0$$

$$p'_H(x) = \left(\frac{bc}{x^c} - 1\right) \frac{r_H(x)}{x^2} = 0 \quad \text{za} \quad x^c = bc.$$

Grafici ove tri funkcije (graf. 8.) imaju željeni oblik. Parametri b i c bi se, kao i u prethodnom slučaju, *mogli odrediti koristeći prevojnu tačku funkcije rasta i maksimum prosječnog prirasta.* U ovom slučaju parametre b i c *možemo odrediti i metodom najmanjh kvadrata primijenjenim na funkciju*



Graf. 8.

$$\ln\left(\ln\frac{a}{r_H(x)}\right) = B - c\ln x,$$

gdje je $B = \ln b$.

Veoma često se, naročito u oblasti prirodnih nauka, koristi kao funkcija rasta (populacije biljnih i životinjskih vrsta, stanovništva, proizvodnje mnogih grana industrije, štednih uloga itd.) tzv. logistička funkcija

$$r(x) = \frac{a}{b + cd^{fx}}.$$

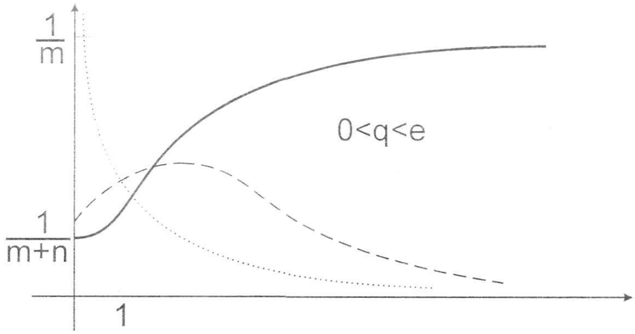
Ova se funkcija jednostavnim transformacijama može svesti na oblik

$$r(x) = \frac{1}{m + nq^x},$$

a najčešće se javlja u obliku

$$r(x) = \frac{A}{B + e^{-Cx}},$$

gdje je $m = \frac{B}{A}$, $n = \frac{1}{A}$, $q = e^{-C}$. Ova funkcija je detaljno analizirana u radu Ane Kunovac (2). Pokazano je i na koji način se u tom slučaju može primijeniti metod najmanjih kvadrata. Njen grafik (graf. 10.) ima željeni s-oidni oblik za $0 < q < 1$ (zato se najčešće uzima $q = e^{-C}$). Osnovni nedostatak joj je to što je



Graf. 9.

$$r(0) = \frac{1}{m+n} \neq 0.$$

Horizontalna asimptota joj je $y = \frac{1}{m}$. Iz

$$t(x) = r'(x) = \frac{-nq^x \ln q}{(m+nq^x)^2}$$

slijedi da je

$$t(0) = \frac{-n \ln q}{m+n} > 0, \quad \lim_{x\to\infty} t(x) = 0.$$

Iz

$$t'(x) = np^x \ln^2 q \frac{nq^x - m}{(nq^x + m)^2}$$

slijedi da je $t'(0) > 0$ i $t'(x) = 0$ (tj. funkcija $r(x)$ ima prevojnu tačku, a funkcija $t(x)$ ekstrem) za

$$x = \frac{\ln m - \ln n}{\ln q} \quad (> 0 \text{ za } 0 < m < n).$$

Iz

$$p(x) = \frac{1}{x(m+nq^x)}$$

$$p'(x) = -2\frac{m + nq^x + xnq^x \ln q}{x(m+nq^x)}$$

vidimo da je $p(x) > 0$ za $x > 0$, $p'(x) \neq 0$ za $x > 0$,

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0} p(x) = \infty.$$

Dakle ova funkcija ima *više nedostataka nego prethodne dvije eksponencijalne funkcije*, naročito u blizini tačke $x = 0$ (za mlađa stabla). Prednost joj je u tome što se *za računanje vrijednosti parametara može primijeniti metod najmanjih kvadrata*, što je pokazano u navedenom radu A. Kunovac.

Pošto ne polazi iz koordinatnog početka mogla bi se eventualno koristiti za izravnanje funkcije visine stabla u zavisnosti od prsnog prečnika.

4. Zaključak

Oslanjajući se samo na ispitivanje oblika grafika funkcije rasta, mogli bi zaključiti da su za izravnaje najbolje funkcije Mihajlova

$$r_H(x) = ae^{-b/x^c}$$

za $a > 0$, $b > 0$ i $c > 0$ i Mitscerlicha

$$r_M(x) = a(1 - e^{-bx})^c$$

za $a > 0$, $b > 0$ i $c > 0$. Levakovićeva

$$r_L(x) = a\left(\frac{x^d}{b + x^d}\right)^c$$

i Prodanova

$$r(x) = \frac{x^2}{a + bx + cx^2}$$

imaju manje nedostatke u neposrednoj blizini koordinatnog početka (za veoma malu starost). Ostale analizirane funkcije imaju veće nedostatke.

Što se tiče određivanja vrijednosti parametara u slučaju kad nije moguće primijeniti metod najmanjih kvadrata, vrlo je teško donijeti neki zaključak bez testiranja na rezultatima mjerenja. Ovaj rad je zapravo i pisan s ciljem da čitaoce koji mogu doći do podataka i posjeduju potrebna tehnička sredstva, podstakne na istraživanja koja bi dovela do argumentovanog odgovora na dva pitanja postavljena na početku ovog rada.

Literatura

1. Bronstein L.N. i Semendjajev K.A. (1964): Matematički priručnik za inženjere i studente, "Tehnička knjiga" Zagreb,
2. Kunovac A. (1979): Ekonometrijska analiza logističke funkcije, Zbornik radova Ekonomskog fakulteta Univerziteta u Sarajevu, br. 14.
3. Matić V. (1959): Taksacioni elementi prebornih šuma jele, smrče i bukve na području Bosne. Radovi Šumarskog fakulteta i Instituta za šumarstvo i drvnu industriju u Sarajevu, god. IV, br. 4, Sarajevo,
4. Šumarska enciklopedija 2, Zagreb, MCMLXIII, izdanje i naklada Jug. leks. zavoda.

Summary

The best functions of the growth, from the mathematical aspect, are: Mihajlov's, Mitscherlich's, Levaković's and Prodan's. However, establishing the

parameters of these functions leads to too complicated system of equations, and to solve this problem some ideas are suggested. The idea of possible use of the best function for growth, current increment and average increment as three varieties of one function is discussed. It is interesting to examine how the results of the measurement of only one function (growth, current increment, or average increment) may fit to other two functions obtained by the mathematical way.