B. TARTALJA

IZNALAŽENJE KRITIČNOG PRESJEKA PROSTO POLOŽENIH NOSAČA

Uvod

Kod mostova, kranskih staza i sličnih konstrukcija opterećenih, pored stalnog, još i raznolikim pokretnim teretima, postoje neiscrpne mogućnosti raznih kombinacija opterećenja koja u krajnjem slučaju, u kritičnom presjeku, daju maksimalnu veličinu momenta savijanja.

Kod prosto položenih nosača obično se kritički presjek iznalazi bilo na osnovi Winklerovog kriterija sa pojedinačnim silama koje zamjenjuju učinak točkova vozila — biló po Ing. Karigu, koji pored ovih sila koje pretstavljaju vozila uzima i jednoliko opterećenje ispred i iza vozila, kao zamjenu za ljudsku navalu.

Međutim ni kod jednog od ova dva kriterija ne uzima se u obzir utjecaj od stalnog opterećenja tj. od vlastite težine konstrukcije i gornjeg stroja mosta.

Pošto je stalno opterećenje u normalnim slučajevima simetrično, kritički presjek neopterećenih mostova i sličnih konstrukcija nalazi se u sredini nosača, ali se on pri nesimetričnom pokretnom opterećenju stvarno nalazi u polovici otstojanja između rezultante svih tereta koji djeluju na nosač i najbližeg joj težeg tereta.

Međutim, stalno opterećenje mnogih konstrukcija, a naročito armirano-betonskih mostova, pretstavlja pretežni dio cjelokupnog opterećenja te se ne bi smio zanemariti njegov neposredni uticaj, naročito zbog toga što se usljed ovog kritični presjek približava ka sredini raspona.

Udovoljavanje ovom zahtjevu cilj je ove rasprave u kojoj se iznosi način na koji se prilikom određivanja kritičnog presjeka prosto položenih nosača uzima u obzir kako simetrično, jednoliko stalno opterećenje tako i nesimetrično pokretni tereti.

Za drumske mostove pretpostavlja se, pri tome, da je zadnji točak vozila teži od prednjega, te se u daljnim izvodima uzima, prilikom kombinovanja stalnog sa raznim mogućnostima pokretnog opterećenja, da se kritični presjek redovno nalazi ispod težeg točka vozila.

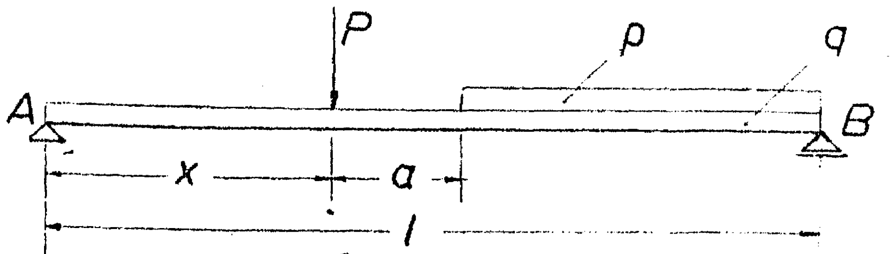
IZVODI

I — Mostovi malih raspona do 4 metra

Kod malih raspona konstrukcija ne postoji mogućnost da jednovremeno opterećenje sa dva točka nekog vozila daje maksimalni momenat, nego će kombinacija težeg točka vozila i ljudske navale, na preostalom dijelu nosača, dati veći momenat savijanja. Udaljenost kritičnog presjeka od lijeve potpore označićemo sa x, što pretstavlja analitički neodređenu veličinu koja se može izračunati za $M_{maks.}$ iz uslova da je na tom mjestu poprečna sila jednaka nuli:

$$1)\qquad T = \frac{dM_x}{d_x} = 0$$

Izračunava se najprije neka od potpornih reakcija (u ovom slučaju A_x) a zatim momenat M_x za presjek pod teretom P.



Slika 1

q jednoliko stalno opterećenje

p jednoliko pokretno opterećenje

P teži točak vozila

$$A = \frac{1}{l}\left[P(l-x) + p\frac{(l-a-x)}{2} + \frac{ql^2}{2}\right]$$

$$M_x = A_x - \frac{qx^2}{2} = \frac{P}{l}(l-x)x - \frac{p}{2l}(l-a-x)^2 x + \frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2$$

$$M_x = \frac{p}{2l}x^3 - \left[\frac{P}{l} + \frac{p}{l}(l-a) + \frac{q}{2}\right]x^2 + \left[P + \frac{p}{2l}(l-a)^2 + \frac{ql}{2}\right]x$$

uvrštavanjem koeficienata $E = \frac{p}{2l}$, $F = \frac{P}{l} + \frac{p}{l}(l-a) - \frac{q}{2}$ i

$G = P + \frac{p}{2l}(l-a)^2 + \frac{ql}{2}$ dobije se:

$$(2)\quad M_x = Ex^3 - Fx^2 + Gx$$

$$(3)\quad \frac{dM_x}{dx} = 3Ex^2 - 2Fx + G = 0,$$ iz čega slijedi

(4) otstojanje kritičnog presjeka $x = \frac{F}{3E} \pm \sqrt{\left(\frac{F}{3E}\right)^2 - \frac{G}{3E}}$

Prva derivacija ove općenite jednadžbe momenta daće jednadžbu poprečne sile koja za vrijednost nula omogućava proračunavanje otstojanja x kritičnog presjeka od potpore A.

Primjer:

$$l = 4,0 \text{ m}, \ a = 1,0 \text{ m}, \ q = 1000 \text{ kg/m}, \ p = 400 \text{ kg/m}, \ P = 4,0 \text{ t}$$

$$E = \frac{400}{2 \times 4,0} = 50$$

$$F = \frac{4000}{4,0} + \frac{400}{4,0}(4,0 - 1,0) + \frac{1000}{2} = 1000 + 300 + 500 = 1800$$

$$G = 4000 + \frac{400}{2 \times 4,0}(4,0 - 1,0)^2 + \frac{1000 \times 4,0}{2} = 4000 + 450 + 2000 = 6450$$

$$x = \frac{1800}{3 \times 50} \pm \sqrt{12,0 - \frac{6450}{3 \times 50}} = 12,0 \pm \sqrt{144 - 43} = 12 - 10,49 = 1,95 \text{ m}$$

$$A = \frac{1}{40}\left[4000\,(4,0 - 1,95) + 400\,\frac{(4,0 - 1,0 - 1,95)^2}{2} - \frac{1000 \times 4,0^2}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{4,0}\,(8200 + 220 + 8000) = 4100 \text{ kg}.$$

$$M_{maks} = 4100 \times 1,95 - 1000\frac{1,95^2}{2} = 7990 - 1900 = 6090 \text{ kgm}.$$

Da je račun izvršen po K a r i g u tj. bez obzira na stalno opterećenje bio bi kritičan presjek pri x = 1,76 m.

II — Mostovi raspona preko 4,0 do 8,0 metara

Kod mostova raspona preko 4,0 do 8,0 metara pojaviće se maksimalni momenat kad su oba točka na mostu, a ljudska navala djeluje samo ispred ili samo iza vozila.

Postupak je isti kao kod kombinacije I, samo što se prilikom proračunavanja reakcije i maksimalnog momenta uzima u obzir još i djelovanje manje opterećenog točka vozila (P_1). Kritični presjek biće pod težim točkom (P_2), u položaju bližem sredini raspona konstrukcije, u otstujanju x od lijeve potpore A. Kao i prije, izračunava se reakcija Ax i opći momenat savijanja M_x Dužina x može se izračunati ako se prva derivacija od Mx do dx postavi jednaka nuli.

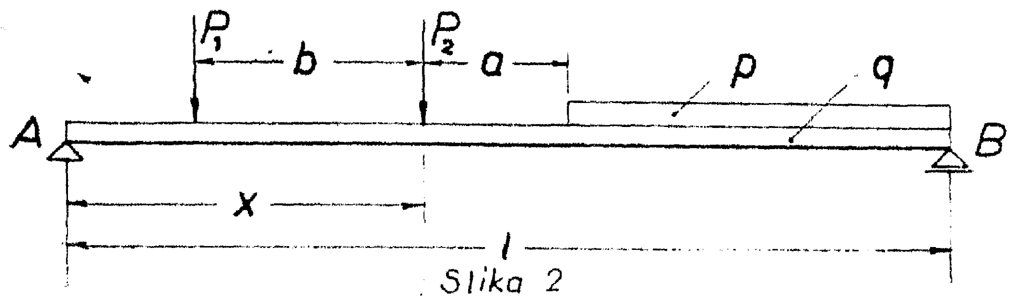
Primjer:

$$l = 8,0 \text{ m}, \ a = 1,0 \text{ m}, \ b = 3,0 \text{ m}, \ q = 1000 \text{ kg/m},$$
$$p = 400 \text{ kg/m}, \ P_1 = 2,0 \text{ t}, \ P_2 = 4,0 \text{ t}$$

$$E = \frac{400}{2 \times 8,0} = 25$$

$$H = \frac{2000}{8,0} + \frac{4000}{8,0} + \frac{400}{8,0}(8,0 - 1,0) + \frac{1000}{2} = 1600$$

$$I = \frac{2000\,(8,0 + 3,0)}{8,0} + 4000 + \frac{400\,(8,0 - 1,0)^2}{2 \times 8,0} + \frac{1000}{8,00} = 11.975$$



Slika 2

q jednoliko stalno opterećenje

p jednoliko pokretno opterećenje

P_1 manje opterećeni točak vozila

P_2 više opterećeni točak vozila

$$A_x = \frac{1}{l}\left[P_1(l+b-x) + P_2(l-x) + \frac{p(l-a-x)^2}{2} + \frac{ql^2}{2}\right]$$

$$M_x = A_x - P_1 b - \frac{qx^2}{2}$$

$$M_x = \frac{P_1(l-b)}{l}x - \frac{P_1}{l}x^2 + P_2 x - \frac{P_2}{l}x^2 + \frac{p(l-a)}{2l}x^2 - \frac{p}{l}(l-a)x^2 + \frac{p}{2l}x^3 +$$

$$+ \frac{ql}{2}x - P_1 b - \frac{q}{2}x^2$$

$$M_x = \frac{p}{2l}x^3 - \left[\frac{P_1}{l} + \frac{P_2}{l} - \frac{p}{l}(l-a) + \frac{q}{2}\right]x^2 + \left[\frac{P_1(l-a)}{2} + P_2 + \frac{p(l-a)^2}{2l} + \frac{ql}{2}\right]x - P_1 b$$

Uvrštavanjem koeficienata: $E = \frac{p}{2l}$, $H = \frac{P_1}{l} + \frac{P_2}{l} + \frac{p}{l}(l-a) + \frac{p}{l}$

$I = \frac{P(l+b)}{l} - P_2 + \frac{p}{2l}(l-a)^2 + \frac{ql}{2}$ slijedi

$$M_x = Ex^3 - Hx - Ix - P_1 b$$

$$T = \frac{dM_x}{dx} = 3Ex^2 - 2Hx - I = 0$$

$$x = \frac{H}{3E} \pm \sqrt{\left(\frac{E}{3E}\right)^2 - \frac{I}{3E}}$$

$$x = \frac{1600}{3 \times 25} \pm \sqrt{21.34^2 - \frac{11.975}{3 \times 25}} = 21{,}34 - 17{,}17 = 4{,}17 \text{ m}$$

$$A_x = \frac{1}{8{,}0}\,(2000\,(8{,}0 - 4{,}17 + 3{,}0) + 4000\,(8{,}0 - 4{,}17) +$$

$$+ \frac{400\ (8{,}0 - 4{,}17 - 1{,}0)^2}{2} + \frac{1000 \times 8{,}0^2}{2} = 13300 \text{ kg.}$$

$$M_{maks} = 13.300 \times 4{,}17 - 2000 \times 3{,}0 - \frac{1000 \times 4{,}17^2}{2} =$$

$$= 42100 - 6000 - 10400 = 25.700 \text{ kgm.}$$

Po Karigu bi bilo otstojanje kritičnog presjeka $x = 4{,}87$ m čim bi nastala dispozicija koja bi odgovarala sljedećoj mogućnosti III, sa ljudskom navalom ispred i iza vozila.

U gornjem primjeru zanemaren je uticaj ljudske navale ispred vozila na preostalom slobodnom prostoru od 417 — 400 = 17 cm, što znači da je zanemareno opterećenje od 0,17 × 400 = 68 kg; ovo nije bitno, pošto pretpostavljeno cjelokupno opterećenje iznosi:

$$2000 + 4000 + 1000 \times 80 + 400\ (80 - 417 - 10) = 15.540 \text{ kg.}$$

III — Mostovi raspona preko 8,0 do 18,0 m

Kod većih raspona od 8,0 metara mora se računati sa opterećenjem od dva motorna vozila, a preostali dio kolovoza opterećuje se jednolikim opterećenjem koje odgovara ljudskoj navali. Međutim, dva vozila na mostovima raspona do 16,0 metara ne daju maksimalni učinak momentna savijanja jer se veći učinak postiže jednim vozilom postavljenim u najnepovoljnijem položaju i sa ljudskom navalom na preostalom prostoru.

Postupak je načelno isti kao i prije. Otstojanje težeg točka od lijeve potpore, koje nam daje kritični presjek, označiće se opet sa x. Za ovaj neodređeni položaj izračunaće se opet opći izrazi za reakciju Ax i momenat savijanja Mx.

Prva derivacija momenta savijanja daće poprečnu silu T koja će za vrijednost jednaku nuli omogućiti proračun kritičnog presjeka x.

Prilikom niže navedenog računskog postupka, u ovom slučaju, nije računato sa dvije odvojene ljudske navale ispred i iza vozila, već je uzeta puna ljudska navala po cijelom nosaču, a od toga je odbijen prekinuti dio, na dužini na kojoj je smješteno vozilo.

Primjer:

$l = 16{,}0$ m, $a = 1{,}0$ m, $b = 3{,}0$ m, $P_1 = 2$ t, $P_2 = 4$ t, $p = 400$ kg/m, $q = 1000$ kg/m

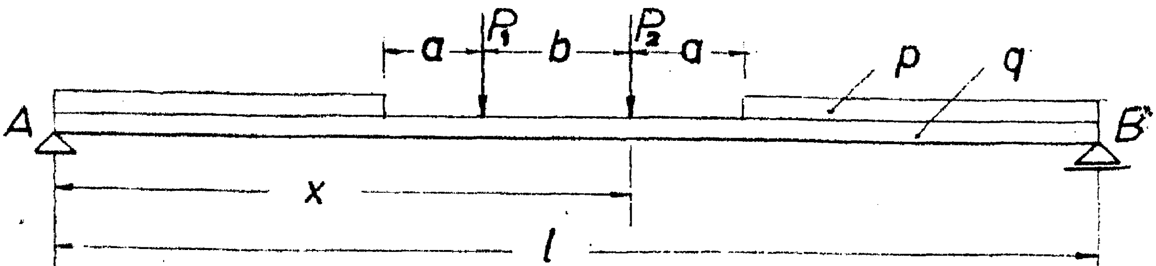
$$K = \frac{2000}{16{,}0} + \frac{4000}{16{,}0}\quad \frac{400}{16{,}0}(2 + 3) + \frac{1000}{2} + \frac{400}{2} = 950$$

$$L = \frac{2000}{16{,}0}(16{,}0 + 3{,}0) + 4000 + \frac{400 \times 16}{2} - \frac{400}{16}(2 + 3)(16{,}0 + \frac{3{,}0}{2}$$

$$\frac{1000 \times 16{,}0}{2} = 15400$$

$$S = -2000 \times 3{,}0 + \frac{400 \times 4{,}0^2}{2} = -6000 + 3200 = -2800$$

$$x = \frac{15400}{2 \times 950} = 8{,}103 = 8{,}10 \text{ m.}$$



Slika 3.

q	jednoliko stalno opterećenje
p	jednoliko pokretno opterećenje
P_1	manje opterećeni točak vozila
P_2	više opterećeni točak vozila

$$A_x = \frac{1}{l}\left[P_1(l+b-x) + P_2(l-x) + \frac{pl^2}{2} - p(2a+b)\left(l+\frac{b}{2}-x\right) + \frac{ql^2}{2}\right]$$

$$M_x = A_x x - P_1 b - p\left[x-(a+b)\right]\left[x - \frac{x-(a+b)}{2}\right] - \frac{qx^2}{2}$$

$$M_x = \frac{P_1}{l}(l+b)x - \frac{P_1}{l}x^2 + P_2 x - \frac{P_2}{l}x^2 + \frac{pl}{2}x - \frac{p}{l}(2a+b)\left(l+\frac{b}{2}\right)x +$$

$$+ p(2a+b)x^2 + \frac{ql^2}{2}x - P_1 b - p\left[x-(a+b)\right]x + p\frac{\left[x-(a+b)\right]^2}{2} - \frac{qx^2}{2}$$

$$M_x = -\left[\frac{P_1}{l} - \frac{P_2}{l} - \frac{p}{l}(2a+b) + \frac{q}{2} + \frac{p}{2}\right]x^2 + \left[\frac{P_1}{l}(l+b) + P_2 + \frac{pl}{2} -\right.$$

$$\left. - \frac{p}{2}(2a+b)\left(l+\frac{b}{2}\right) + \frac{ql}{2}\right]x - P_1 b + \frac{p(a+b)^2}{2}$$

Uvrštavanjem koeficienata: $K = \frac{P_1}{l} + \frac{P_2}{l} - \frac{p}{l}(2a+b) + \frac{q}{2} - p$

$L = \frac{P_1}{l}(l+b) + P_2 + \frac{pl}{2} - \frac{p}{l}(2a+b)\left(l+\frac{b}{2}\right) + \frac{ql}{2}$; $S = P_1 b + \frac{p(a+b)^2}{2}$

slijedi: (8) $M_x = -Kx^2 + Lx + S$

(9) $\frac{d\,M_x}{dx} = -2Kx + L = 0$

čime je određen kritični presjek. $x = \frac{L}{2K}$

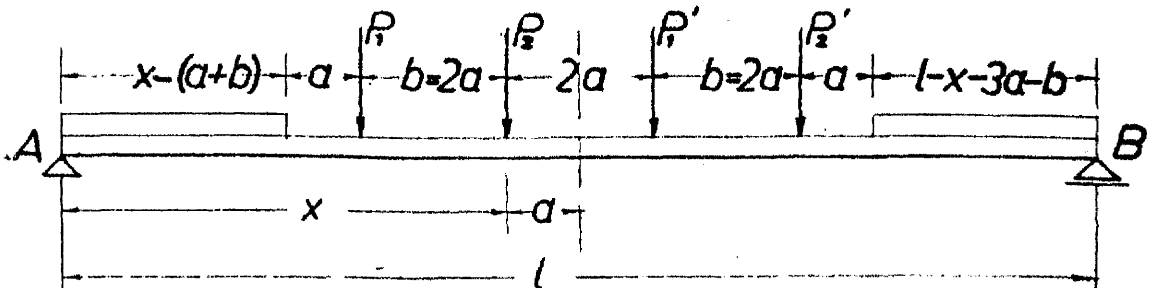
$$A_x = \frac{1}{16{,}0}\left[2000 \times 10{,}92 + 4000 \times 7{,}90 + \frac{400 \times 16^2}{2} - 400 \times 9{,}4\right] +$$

$$+ \frac{1000 \times 16{,}0}{2} = 13370 \text{ kg}$$

$$M_{maks} = 13370 \times 8{,}1 - 2000 \times 3{,}0 - 400 \times 4{,}1 \times 605 - \frac{1000 \times 8{,}10^2}{2}$$

$$= 108.300 - 6000 - 360 - 32800 = 60.140 \text{ kg.}$$

Po K a r i g u bio bi kritičan presjek na otstojanju x = 8.64 m.



Slika 4.

$$a = \frac{b}{2} = \frac{4{,}50}{2} = 2{,}25 m$$

(11a) $A_x = \frac{1}{l}\Big[P_1(l-x+b)+P_2(l-x)+P_1'(l-x-2a)+P_2'(l-x-2a-b)+\frac{pl^2}{2} - p(4a+2b)(l-x-a)\Big]+\frac{ql}{2}$ Pošto je po Privremenim tehničkim propisima $b=2a$, prelazi izraz za reakciju u

(11b) $A_x = \frac{1}{l}\Big[P_1(l-x+2a)+P_2(l-x)+P_1'(l-x-2a)+P_2'(l-x-4a)+\frac{pl^2}{2} - p8a(l-x-a)\Big]+\frac{ql}{2}$. Onda je opći izraz za moment savijanja: (12a) $M_x = A_x x - P_1 3a - P_2 a - p(x-3a)\left(x-\frac{x-3a}{2}\right) - \frac{qx^2}{2}$

Uvrštavanjem izraza za A_x i sumom $P_1+P_2+P_1'+P_2'=R$ dobije se elementarnim matematičkim operacijama:

(12b) $$M_x = -\left[\frac{R}{l}-\frac{8pa}{l}-\frac{p+q}{2}\right]x^2+\left[R+\frac{2P_1a}{l}-\frac{2P_1'a}{l}-\frac{4P_2'a}{l}+\frac{pl}{2}-8ap+\frac{8aP}{l}+\frac{ql}{2}\right]x-3aP_1-aP_2+\frac{(3a)^2p}{2}$$

Uvrštavanjem koeficienata:

$$U = \frac{R}{l} - \frac{8pa}{l} + \frac{p+q}{2}$$

$$V = R + \frac{2Pa}{l} - \frac{2P_2a}{l} + \frac{4P_2'}{l} + \frac{pl}{2} - 8pa + \frac{8Pa^2}{l} - \frac{ql}{2}$$

$$W = -3P_1a - P_2a + \frac{9pa^2}{2}$$ slijedi :

(12c) $M_x = -Ux^2 + Vx + W$, odnosno

$\frac{dM_x}{dx} = -2Ux + V = 0$, a otstojanje kritičnog presjeka biće:

$x = \frac{V}{2U}$, čijim uvrštavanjem u (12c) dobijemo maksimalni moment. Sile $P_1 = P_1' = 3{,}0\ t$ i $P_2 = P_2' = 10{,}0\ t$ kao i otstojanje $a = 2{,}25 m$ određeni su, dok jednolika opterećenja nisu određena, pošto su zavisna od raspona.

IV — Mostovi raspona većih od 18,0 metara

Za mostove raspona većih od 18,0 metara izvešće se izrazi koji odgovaraju privremenim tehničkim propisima za mostove, tj. zadovoljiće se zahtjevi javnog saobraćaja, jer nije vjerojatno da će objekti ovih raspona služiti samo specifično šumskom transportu. Po »Privrednim tehničkim propisima za drumske mostove« sastoji se opterećenje na saobraćajnoj traci širine 2,5 metara, od dva motorna vozila, svako po 13,0 tona ukupne tonaže i od opterećenja sa ljudskom navalom na preostalom dijelu trake.

Računaćemo na isti način kao prije, kod mostova sa jednim vozilom i ljudskom navalom ispred i iza ovoga.

ZAKLJUČAK

Iz izrađenih primjera vidi se, kako je to već u uvodu naglašeno, da kada se pri iznalaženju kritičnog presjeka uzima u obzir i stalno opterećenje, ovaj se osjetljivo približava ka sredini raspona konstrukcije. Priložena tablica pregledno pokazuje razlike u položaju kritičnog presjeka.

Raspon	Polovica raspona	Kritični presjek bez stalnog od potpore	opterećenja od sredine	kombinovanog od potpore	opterećenja od sredine
4,0 m	2,0 m	1,76 m	0,24 m	1,95 m	0,05 m
8,0 m	4,0 m	4,87 m	0,87 m	4,17 m	0,17 m
16,0 m	8,0 m	8,61 m	0,64 m	8,10 m	0,10 m

Uticaj stalnog opterećenja raste sa njegovim intenzitetom i rasponom konstrukcije.

Iznijetim postupcima može se na relativno lak način izračunati položaj kritičnog presjeka koji odgovara raznolikim prometnim sredstvima, koja za mostove na šumskim putevima nisu tipizirana. Za raspone preko

18,0 metara bolje je računati sa opterećenjima po »Privremenim tehničkim propisima« (P. T. P.) za mostove, iz razloga koji su navedeni.

Druga prednost ovog postupka je u tome što se ne moraju konstruirati uplivnice (uticajne linije) za razne presjeke da bi se dobio maksimalni momenat savijanja.

Prilikom preračunavanja treba sile od pokretnog opterećenja povećati za dinamički učinak, za veličinu koja odgovara faktoru:

$$\psi = \frac{550 + 5\,l}{10 + l}$$

pri čemu je l raspon u metrima; rezultat se dobiva u procentima kojim se povećavaju statičke vrijednosti.

Ako se na mostu predviđaju samo laka vozila, mora se cijeli proračun prekontrolirati da bi se utvrdilo, da li učinak od ljudske navale po cijelom mostu nije veći od kombinovanog opterećenja.

ZUSAMMENFASSUNG

DER KRITISCHE QUERSCHNITT BEI FREIAUFLIEGENDEN TRÄGERN

Im vorliegenden Beitrag wird die Lage des gefährlichen Querschnittes bei frei aufliegenden Trägern bei kombinierter beweglicher und ständiger Belastung untersucht.

Der übliche Vorgang, den gefährlichen Querschnitt bloss für eine bewegliche Lastengruppe zu untersuchen, kann keine richtigen Ergebnisse liefern, denn die ständige Belastung ist bestrebt, durch ihre gewöhnlich symetrische Anordnung, diesen der Mitte hin zu verschieben, während das eben bei einer beweglichen Lastengruppe von Fahrzeugen und sonstigen Vehrkersmitteln nicht der Fall ist.

In den gezeigten Ableitungen sind vier Lastfälle behandelt, die die gewöhnlichen Lastanordnnungen, entsprechend der jeweiligen Spannweite für Brücken im Betriebe des Waldtransportes erfassen.

Die Ableitungen für die Berechnung des gefährlichen Querschnittes beruhen auf der Tatsache, dass das Biegungsmoment seinen Höchstwert in dem Querschnitt hat, in dem die Querkraft gleich Null ist. Aus dem allgemeinen Ausdruck für das Biegungsmoment erhält man durch Differenzieren den ersten Differentialquotienten, dessen Nullwert gleich der Querkraft die Möglichkeit bietet, die Entfernung des gefährlichen Querschnittes von einer Stütze rechnerisch zu erfassen.

Die zahlenmässig ausgeführten Beispiele beweisen, wie fühlbar sich der gefährliche Querschnitt der Mitte des Trägers nähert, wenn man auch die ständige Last in Rechnung setzt.

In den Beispielen wurde die Lastanordnung für die Spannweiten bis 18, — m willkürlich angenomen, während für grössere Spannweiten die Lastenanordnung der »Provisorischen Technischen Vorschriften für Strassenbrücken«, als massgebend für die Verkehrsbelastung vorausgesetzt wurde. Bei solchen Spannweiten könnten diese Brücken wahrscheinlich auch dem öffentlichen Verkehr dienen.