BOŽ. POPOVIĆ

NEPOSREDNO I NAKNADNO UTVRĐIVANJE DEBLJINSKOG RASPOREDA SASTOJINE

Kada se utvrđuje debljinski prirast stabala jedne sastojine bušenjem priraštajnim svrdlom, tada možemo da utvrdimo raspored stabala sastojine (po prečnicima) i da iz veličine prirasta za određeni broj godina rekonstruišemo kakav je bio raspored pre tog vremenskog perioda. Pri tome ponekad iskrsavaju dva problema:

1) Ako se prečnik stabla meri sa određenom tačnošću (recimo ±5 mm) da li vredi meriti njegov prirast sa većom tačnošću (recimo ±1 mm)?

2) Ako smo već izvršili klasiranje stabala po prečnicima sa sadašnjim stanjem i našli prosečni debljinski prirast u pojedinim klasama, kako iz tih podataka možemo rekonstruisati kakav je bio raspored po klasama pre određenog broja godina?

Svrha ovog rada je da da odgovor na ta dva pitanja.

I

Nesumnjivo je da je upoređenje sadašnjeg i pređašnjeg stanja sastojine (u pogledu debljine stabala) sigurnije ako kod svakog stabla uzmemo uporedo njegovu sadašnju debljinu i debljinu pre određenog broja godina pa izvršimo posebno klasiranje sastojine u sadašnjem i prethodnom stanju. Ako pri tome merimo i prečnik i njegov prirast sa istom tačnošću (radi konkretnosti uzmimo da vršimo zaokruživanje na cele santimetre — kako se obično radi) tada ćemo dobiti u sadašnjem stanju sastojine jedan raspored, a u prethodnom stanju drugi raspored. Ako pak pritom merimo prirast sa većom tačnošću, da li će se dobiti drukčiji (nesumnjivo tačniji) raspored ili će se možda ta preciznost izgubiti u zaokruživanju prečnika na 1 cm?

Posmatrano izolovano, mnogi milimetri prirasta će se pri zaokruživanju izgubiti, ali će zato drugi prouzrokovati smanjenje debljine za 1 cm, pa možda i prelaz stabala iz jedne klase u drugu. Kakav će biti krajnji efekat, tj. da li se u proseku može osetiti uticaj povećane preciznosti u merenju prirasta?

Obeležimo sadašnju debljinu stabla sa x, njenu grešku merenja (i zaokruživanja) sa δ, porast prečnika u određenom vremenskom intervalu sa $\triangle x$, a grešku koja se čini u merenju prirasta sa $\delta_\triangle$. Tada je sadašnja stvarna debljina $x+\delta$, a pre određenog broja godina ona je bila $x+\delta-\triangle x-\delta\triangle$.

Ordinata krive rasporeda stabala po debljinskim klasama srazmerna je verovatnoći da stablo ima određenu debljinu. Ako je sadašnji raspored izražen krivom $y=f(x)$ a raspored u prethodnom stanju izražen krivom čija je jednačina $y=F(x)$, tada mora biti

(1) $$f(x+\delta)=F(x+\delta-\triangle x-\delta_\triangle),$$

jer je ista verovatnoća da neko stablo sada ima debljinu (prečnik) $x+\delta$ i da je pre određenog vremena imalo debljinu $x+\delta-$ $-\triangle x-\delta_\triangle$.

Stavimo sada

(2) $$x+\delta-\triangle x-\delta_\triangle=z,$$

pa ćemo, usled (1), imati

$$F(z)=f(z+\triangle x+\delta_\triangle)=f(z)+(\triangle x+\delta_\triangle).f'(z)+$$
$$+\frac{(\triangle x+\delta_\triangle)^2}{2}f''(z)+\ldots\ldots$$

Kada u ovom Maklorenovom redu, gde $f'(z)$ i $f''(z)$ *znače prvi i* drugi izvod po promenljivoj x, zanemarimo kvadrate i više stepene male veličine $(\triangle x+\delta_\triangle)$, dobićemo približno

(3) $$F(z)=f(z)+(\triangle x+\delta_\triangle).\,f'(z).$$

To je veza između starog i novog rasporeda sastojine. Ona će nam dati i vezu između grešaka koje se tom prilikom čine. Naime, ako sa s_F obeležimo srednju grešku koju netačna merenja prouzrokuju u starom rasporedu, sa s_f istu grešku u novom rasporedu, a sa $s_\triangle$ srednju grešku u merenju prirasta prečnika, tada ćemo po pravilu za varijansu zbira dveju veličina imati

(4) $$s_F^2=s_f^2+s_\triangle^2[f'(z)]^2$$

Ova jednakost nam najpre kaže da će greške u rasporedu ranijeg stanja sastojine biti veće nego greške u rasporedu njenog sadašnjeg stanja, a zatim nam kaže da će pritom razlika biti utoliko manja ukoliko je $s_\triangle$ manje. Ovo upravo daje odgovor na prvo postavljeno pitanje. Naime nije besmisleno meriti $\triangle x$ sa većom preciznošću nego x, već naprotiv treba nastojati da ova greška bude neznatna u odnosu na glavnu grešku, kada se greška u pređašnjem rasporedu praktično svodi na prvi član u izrazu (4), tj. na grešku u sadašnjem rasporedu.

Iz (4) možemo dalje videti da ovo povećanje preciznosti nije važno oko maksimuma krive rasporeda sastojine (gde je f' skoro $=0$, pa prema tome i uticaj greške $s_\triangle$ neznatan), ali je važno onde gde je $f'(z)$ dosta veliko, tj. gde su velike razlike između broja stabala u pojedinim klasama.

Primedba. Važno je napomenuti da sve ovo ne važi kada je već pri merenju prečnika izvršeno zaokružavanje (na recimo cele santimetre, kako su podešene mnoge prečnice). Tada se pitanje postavlja drukčije. Naime tada se od već zaokruženog x više ne može restaurisati merena vrednost prečnika, pa ćemo za prethodni prečnik moći da stavimo samo $x - \triangle x - \delta_{\triangle}$. Onda će pri novom zaokruživanju biti isto kao da smo od x oduzeli zaokruženu vrednost merenog $(\triangle x + \delta_{\triangle})$, pa nam, dakle, ništa ne vredi veća preciznost merenja prirasta, jer se ova gubi pri novom zaokruživanju. Ako se dakle odmah pri merenju debljina stabla izražava u celim santimetrima, tada ne vredi ni prirast prečnika izražavati u jedinicama manjim od santimetra. Da bismo od povećane preciznosti pri merenju prirasta imali neke koristi, potrebno je da se prečnik izražava onako kako se može meriti, navodeći i ocenjene delove santimetra (bez obzira što oni verovatno nisu tačni), *pa tek posle oduzimanja prirasta izvršiti zaokružavanje i starog i novog prečnika.*

II

Radi odgovora na drugo pitanje uzećemo opet da je $y = f(x)$ kriva sadašnjeg, a $y = F(x)$ kriva ranijeg rasporeda. Ovde nećemo uzeti u obzir greške merenja, jer je zaokruživanje već izvršeno, pa će biti

$$F(z) = f(x), \qquad z = x - \triangle x.$$

Kada opet razvijemo u red, imaćemo

$$F(z) = f(z + \triangle x) = f(z) + \triangle x.\ f'(z) + \frac{\triangle^2 x}{2}.f''(z) + \ldots.$$

Verovatnoća da će neko stablo imati prečnik z data je izrazom $F(z)dz$, a broj stabala u klasi sa intervalom c biće

$$(5) \qquad n(x) = N \int_{x-\frac{c}{2}}^{x+\frac{c}{2}} F(z)dz,$$

pri čemu je N ukupan broj stabala sastojine.

U okviru jedne klase možemo smatrati $\triangle x$ konstantnim, pa je

$$\int_{x-\frac{1}{2}c}^{x+\frac{1}{2}c} F(z)dz = \int_{x-\frac{1}{2}c}^{x+\frac{1}{2}c} f(z)dz + \triangle x. \int f'(z)dz + \frac{\triangle^2 x}{2} \int f''(z)dz + \ldots,$$

odakle imamo

$$(6) \qquad n_1(x) = n(x) + \triangle x.\ n'(x) + \frac{\triangle^2 x}{2}.\ n''(x) + \ldots,$$

pri čemu je $n_1(x)$ broj stabala ranijeg rasporeda, a sa $'$ i $''$ su obeleženi prvi i drugi izvod.

Treba još naći $n'(x)$, a eventualno i $n''(x)$. To ćemo dobiti iz (5), jer je

(7) $$n'(x) = N[f(x + \frac{1}{2}c) - f(x - \frac{1}{2}c)].$$

Vrednost funkcije na krajevima klasnog intervala je približno jednaka poluzbiru njenih vrednosti u sredinama dva susedna intervala, pa je dakle približno

$$f(x_i + \frac{1}{2}c) - f(x_i - \frac{1}{2}c) = \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} - \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} =$$
$$= \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2}$$

Međutim, kad za celu $(i+1)-u$ klasu uzmemo srednje f tj. $f(x_{i+1})$ onda je usled (5) broj stabala u toj klasi

$$n_{i+1} = N. \int_{x_{i+1} - \frac{1}{2}c}^{x_{i+1} + \frac{1}{2}c} f(z)dz = N.\ f(x_{i+1}).\ c,$$

a isto tako i za $(i-1)-u$ klasu, te gornji izraz postaje

$$\frac{n_{i+1} - n_{i-1}}{2Nc}$$

i izraz (7) nam daje (za x iz i-klase)

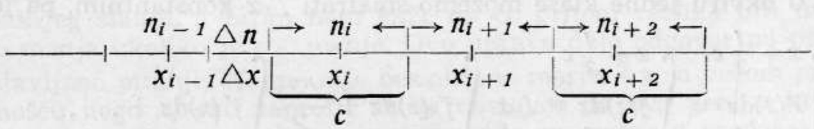
(8) $$n_i' = \frac{n_{i+1} - n_{i-1}}{2c}$$

Za $n''(x)$ ćemo na isti način dobiti

$$n''(x) = N\left[f'(x + \frac{1}{2}c) - f'(x - \frac{1}{2}c)\right] \approx N\left[\frac{f(x+c) - f(x)}{2c} - \right.$$
$$\left. - \frac{f(x) - f(x-c)}{2c}\right],$$

odnosno

$$n_i'' = N\left[\frac{n_{i+1} - n_i}{2Nc^2} - \frac{n_i - n_{i-1}}{2Nc^2}\right] = \frac{n_{i+1} + n_{i-1} - 2n_i}{2c^2}.$$



Prema tome ćemo, koristeći (6), dobiti

(9) $$n_1(x) = n(x) + \frac{\triangle x}{c} \cdot \frac{n_{i+1} - n_{i-1}}{2} +$$
$$+ (\frac{\triangle x}{c})^2 \cdot \frac{n_{i+1} + n_{i-1} - 2n_i}{4}$$

Više stepene ćemo zanemariti, a najčešće neće biti potreban ni drugi stepen, već će biti dovoljno da za prelaz sa novog rasporeda na stari uzmemo samo korekciju prvog reda

$$(9') \qquad \triangle n = \frac{\triangle x}{c} \cdot \frac{n_{i+1} - n_{i-1}}{2},$$

a samo izuzetno korekciju drugog reda

$$(9'') \qquad \triangle_2 n = (\frac{\triangle x}{c})^2 \cdot \frac{n_{i+1} + n_{i-1} - 2n_i}{4}$$

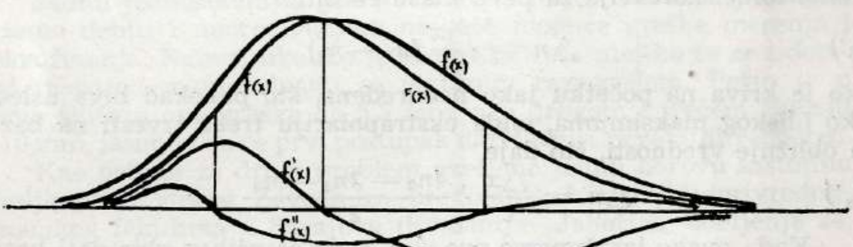
Šta ovo znači praktično?

Kad smo dobili sadašnji raspored stabala po debljinskim klasama, onda u svakoj klasi treba izvestan broj stabala, $\triangle n$, prebaciti u susednu klasu, da bismo dobili raspored koji je postojao pre određenog broja godina. Taj broj $\triangle n$ neće biti proporcionalan broju stabala u toj klasi, tj. neće biti, kako se ponekad uzima,

$$\frac{\triangle n}{n} = \frac{\triangle x}{c}$$

već ga treba naći po formuli *(9')*. Treba samo naglasiti da tom prilikom za $\triangle x$ treba uzeti prosečan prirast prečnika u toj klasi, a za n_{i+1} i n_{i-1} ne treba uzimati stvarno nađene brojeve stabala u klasama (koji su jako skokoviti), već njihove izravnate vrednosti, jer su njihove razlike proizašle u formuli od izvoda teoriske krive $y = f(x)$.

Samo onde gde je $\triangle x$ jako veliko (u odnosu na klasni interval *c*) i gde je istovremeno mala krivina, tj. veliko $\frac{1}{4}(n_{i+1} + n_{i-1} - 2n_i)$, tu će trebati primeniti i drugu korekciju *(9'')*. Očevidno je da to može ponekad biti potrebno samo oko maksimuma, što ilustruje i ucrtana kriva $y = f''(x)$. Međutim i ovde se stvar može pojednostavniti i unekoliko rezultat učiniti još tačnijim. Naime, korekcija *(9'')* može biti osetna oko maksimuma samo ako se r_i nalazi između n_{i-1} i n_{i+1}, jer je tada $2n_i$ znatno $\gtrless$ od $n_{i+1} + n_{i-1}$. Takva situacija nastupa samo jednom — ili pre ili posle maksimuma — i može se izbeći jednostavno time što ćemo pravac izravnate krive rasporeda odrediti razlikom $(n_i - n_{i-1})$ ako je maksimum neposredno posle n_i $(n_i > n_{i+1})$, odn. razlikom $n_{i+1} - n_i)$ ako je maksimum neposredno ispred n_i $(n_i > n_{i-1})$.



Na taj način korekcija

$$(10) \qquad \begin{cases} \triangle n = \dfrac{\Delta x}{c}(n_i - n_{i-1}) \text{ za } n_i > n_{i+1}, \\ \triangle n = \dfrac{\Delta x}{c}(n_{i+1} - n_i) \text{ za } n_i > n_{i-1}, \end{cases}$$

jednostavno zamenjuje oko maksimuma korekcije (9') i (9'') zajedno, a bolje odgovara prirodi toka krive linije odmah pre ili iza maksimuma.

Iz (9') dalje vidimo da će posle maksimuma korekcije biti negativne $(n_{i+1} < n_{i-1})$, a da će pre maksimuma one biti pozitivne (usled toga što je veći broj stabala urastao u tu klasu nego što je iz nje prešao u sledeću klasu). Korekcija će biti najveća oko prevojnih tačaka, što je sve lepo ilustrovano ucrtanom krivom $y = f'(x)$. Deo levo od maksimuma je bez velikog značaja za praktične primere iz šumarstva, jer su sastojine većinom sa L rasporedom, a uz to su tu prirasti drvne mase mali; ali je to razmatranje ipak važno za teorisko osvetljavanje čitavog problema.

Ostaje još pitanje krajnjih klasa, u kojima ne postoji n_{i+1}, odn. n_{i-1}. Iza poslednje klase se s pravom može uzeti $n = o$, jer su sva stabla već uzeta u obzir. Sa tom vrednošću se može izračunati $\triangle n$ (koje može prirodno biti samo negativno). Međutim, u prvu klasu je urastao izvestan broj (nama nepoznat) stabala iz prethodne, nulte, klase. Koliki je taj broj?

Ovde imamo $n(x_1)$ a tražimo $n_1(x_1)$. Ekstrapolacija nam daje

$$n(x_0) = n(x_1) - c \cdot n'(x_1),$$

pa je usled (8)

$$n_1' = \frac{n_2 - n_0}{2c} = \frac{n_2 - n_1 + cn_1'}{2c} = \frac{n_2 - n_1}{2c} + \frac{n_1'}{2}$$

dakle

$$n_1' = \frac{n_2 - n_1}{c}$$

Prema tome, korekcija za prvu klasu će biti

$$(9_1') \qquad \triangle n = \frac{\triangle x}{c}(n_2 - n_1)$$

Ako je kriva na početku jako neodređena, što ponekad biva usled jako bliskog maksimuma, onda ekstrapolaciju treba izvesti na bazi tri obližnje vrednosti, što daje

$$(9_2') \qquad \triangle n = \frac{\triangle x}{c} \cdot \frac{4n_2 - 3n_1 - n_3}{2}$$

Kada ovako izračunamo sve $\triangle n$, tada će njihov zbir dati broj stabala koja su u toku određenog perioda urasla u prvu klasu; to će biti

$$- \mathbf{S}(\triangle n) \cdot$$

Da bismo imali približnu sliku o ovom broju, uzmimo da je $\triangle x$ isto u svim klasama. Tada bi bilo

$$\mathbf{S}\triangle n = \frac{\triangle x}{2c}[(2n_2 - 2n_1) + (n_3 - n_1) + (n_4 - n_2) + (n_5 - n_3) + \ldots$$

$$\ldots + (n_k - n_{k-2}) + (o - n_{k-1})] = \frac{\triangle x}{2c}(n_2 - 3n_1 + n_k + o)$$

Ako bismo za prvu klasu uzeli $(9_2')$ bilo bi

$$\mathbf{S}\triangle n = \frac{\triangle x}{2c}(3n_2 - 4n_1 - n_3 + n_k),$$

što je skoro isto kao i prethodno, jer je $2n_2 - n_1 - n_3 \approx o$

Praktično, dakle, imamo ovo: *Svakoj klasi treba dodati korekciju (9'), izuzev prve klase* — kojoj treba dodati *(9$_1$')*, a u slučaju jako neodređenog početka krive rasporede dodati *(9$_2$')* — *i izuzev klase sa najvećom frekvencijom*, kojoj treba dodati korekciju (10). *Kada zbir svih korekcija nije jednak nuli, onda se ostatak pripiše nultoj klasi i uzima se da je toliko stabala u dotičnom periodu uraslo u prvu klasu.*

III

Na kraju da ove rezultate potkrepim konkretnim primerima.

Najpre za prvi problem uzmimo samo jedno stablo. Ako je njegov izmereni prečnik 28,3 cm sa tačnošću od ± 5 mm, a njegov prirast 17 mm, sa tačnošću od ± 0,5 mm, tada će prvobitni prečnik biti:

bez prethodnog zaokruživanja 28,3 — 1,7 = 26,6 cm ≈ 27 cm (najveća moguća greška 5,5 mm);

sa prethodnim zaokruživanjem prečnika 28 — 1,7 = 26,3 26 cm (najveća moguća greška 10 mm);

sa zaokruživanjem i prečnika i prirasta na cele santimetre 28 — 2 = 26 cm (najveća moguća greška 10 mm).

U drugom slučaju dobijamo isto kao i u trećem, a u prvom je drukčije. Pri klasiranju sastojine može se desiti da se ove razlike uzajamno ponište kod pojedinih stabala, ali gornji dokaz kaže da ovo poništavanje ne mora biti potpuno. A kad se već mogu javiti razlike u klasiranju onda je najbolje raditi onim postupkom koji daje najtačnije rezultate.

Jednu jednostavniju pretstavu o tačnosti merenja postupka možemo dobiti i upoređivanjem najveće moguće greške merenja i zaokruživanja. Naime, ukoliko je ta greška veća utoliko će se i dobiveni raspored manje slagati sa stvarnim rasporedom. Pošto je u prvom slučaju ova greška do 5,5 mm, a u drugom i trećem slučaju do 10 mm, jasno je da će prvi postupak dati tačniji prvobitni raspored.

Kao primer za drugi problem uzećemo jednu borovu sastojinu snimljenu od strane Zavoda za uređivanje šuma Poljoprivredno-šumarskog fakulteta u Sarajevu (Romanija—Jahorina, odeljenje 24, ogledna površina br. 11).

Podaci o kolonama 1, 2, 5, 7, 8, 10 su dobiveni snimanjem i redovnom obradom podataka, i to: u koloni 2 broj stabala po debljinskim stepenima iz odgovarajuće kolone 1 (po sadašnjem stanju sastojine), u koloni 5 prosečni prirast prečnika za stabla dotičnog debljinskog stepena, u koloni 7 pomeranja u debljinskim stepenima na bazi merenog pojedinačnog prirasta prečnika (uz prethodno zaokružavanje prečnika i prirasta), u koloni 8 drvna masa jednog stabla iz dotičnog debljinskog stepena i u koloni 10 ukupno povećanje (odn. smanjenje) drvne mase u tom debljinskom stepenu.

Podaci iz kolona 3, 4, 6 i 9 dobiveni su naknadnim računom, i to: u koloni 3 nalaze se izravnate vrednosti rasporeda stabala (grafički), u koloni 4 je broj $^1/_2(n_{i+1} - n_{i-1})$ potreban za formulu *(9')*, izuzev brojeva označenih zvezdicom, za koje su izračunati izrazi *(9$_1$')* i *(10)*, tj. $n_2 - n_1$ i $n_4 - n_3$. Uz upotrebu ovih vrednosti i pomenutih

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Preč-nik cm	Broj stabala		$\frac{1}{2}(n_i+1 - n_i-1)$	$\overline{\triangle x}$ mm	rekon-str $\triangle n$	$\triangle n$ mere-no	Prirast drvne mase		
	me-ren	izrav-nat					po stablu m^3	rekon-str. m^3	mereno m^3
					+10		0,020	— 0,200	
12,5	28	20	*70	8,3	+12	+11	0,061	— 0,732	— 0,671
17,5	82	90	70	8,5	+13	+23	0,171	— 2,223	— 3,933
22,5	160	160	60	10,0	+12	+12	0,331	— 3,972	— 3,972
27,5	207	210	*50	13,3	+13	+17	0,555	— 7,215	— 9,435
32,5	187	190	—55	15,3	—17	—19	0,852	+14,484	+16,188
37,5	106	100	—82	16,7	—27	—37	1,160	+31,320	+42,920
42,5	19	26	—45	14,3	—13	— 4	1,564	+20,332	+ 6,256
47,5	9	10	—11	11,3	— 2	— 2	2,031	+ 4,062	+ 4,0[illegible]
52,5	3	4	— 3,5	8,2	— 1	— 1	2,558	+ 2,558	+ 2,558
57,5	4	3	— 1	9,1	0	+ 1	3,139	. . . .	— 3,139
62,5	2	2	— 1	10,0	0	— 1	3,794	. . . .	+ 3,794
67,5	0	1	— 0,5	. . .	0	0	. . . .	. . . .	. . . .
72,5	0	1	— 0,5	. . .	0	0	. . . .	. . . .	. . . .
77,5	1	0	— 0,5	13,5	0	0	. . . .	. . . .	. . . .
					S 0	0		+58,414	+54,628

formula nađeni su brojevi iz kolone 6, tj. izvršena je rekonstrukcija prethodnog stanja sastojine, na bazi sadašnjeg stanja i prosečnog prirasta prečnika. Sa ovim brojevima i zapreminama stabala iz kolone 8 nađen je (kolona 9) efekat ovih računa kod prirasta drvne mase.

Kao što se vidi, između promena rasporeda po kolonama 6 i 7 (tj. rekonstruisanog rasporeda i rasporeda određenog na licu mesta) postoje izvesna neslaganja, ali su ona takva da se raspored bitno ne menja. Kao što je prirodno da se očekuje, promene na bazi rekonstrukcije nešto su ravnomernije nego stvarno zabeležene promene.

Efekat ovih promena na prirastu drvne mase cele sastojine je skoro isti, što pokazuju zbirovi kolona 9 i 10. Razlika ne iznosi ni 7% od neposredno određenog prirasta, a to je potpuno u okviru tačnosti određivanja prirasta drvne mase.

RESUMO

SENPERA KAJ POSTA RESTARIGO DE LA DISTRIBUO DE ARBDIAMETROJ

Mezurinte la arbdiametrojn per alkreska borilo oni povas restarigi la antaŭan staton de diametro-distribuo de arbkomplekso. Tiam ekestas du demandoj:

1) Ĉu utilas mezuri la alkreson pli precize ol la diametron mem?

2) Se oni jam klasigis la komplekson laŭ nunaj diametroj kaj oni kalkulis mezan alkreskon en ĉiu klaso, ĉu oni povas el tiuj donoj restarigi la antaŭan distribuon?

1 La nuna diametro de arbo estu x, ĝia mezur— (kaj proksimumig—) eraro estu δ, la alkresko de diametro $\triangle x$ kaj ĝia eraro $\triangle$, ordinato (proporcia al probablo ke arbo havu la donitan dikon) por la nuna distribuo estu $y = f(x)$ kaj por la antaŭa $y_1 = F(x)$. Tiam, pro la sama probablo, devas esti (1), el kio —pere de la signaĵo (2) kaj la seriigo, poste neglektinte la duan kaj pli altajn gradojn, oni akiras (3) por la proksimuma antaŭa distribuo. Se s_F, s_f, $s_\triangle$, estas la koncernaj mezaj eraroj kaj se oni aplikas la varioncon de sumo, oni trovas (4).

Tio montras ke la eraroj en antaŭa klasigo estos malpligrandaj kun $s\triangle$ kaj ke utilas mezuri la alkreskon pli precize, tiel ke ĝia eraro estu neglektenda kompare kun la ĉefa eraro, precipe tie kie $f'(z)$ estas granda (kiam estas grandaj diferencoj inter sinsekvaj klasnombroj).

Rimarko Se la nuna diametro estas proksimumigata jam dum la mezurado, tiam ĉio estas neaplikebla, ĉar tiam por la antaŭa diametro oni povas noti nur $x - \triangle x - \delta\triangle$ kaj ĉe la proksimumigo perdiĝas la pliprecizeco de $\triangle x$. Por utiligi pli precizan mezuradon de $\triangle x$ oni devas ne proksimumigi tuj la diametrojn (ekz. al plenaj centimetroj), kiel oni kutime faras, sed *nur post subtraho de la alkresko proksimumigi kaj la antaŭan kaj la nunan diametron.*

2 Ĉe la dua problemo forfalas la eraroj — ĉio jam estas proksimumigita. Se *N* estas la nombro por la tuta komplekso, tiam (5) dones arbnombron en klaso kun klasintervalo c kaj post la seriigo oni havas (6). Por la unua derivo oni utiligas (7) kaj ni trovas (8), simile por la dua derivo, kaj entute oni havas (9). Praktike tio signifas ke la ŝanĝoj, $\triangle n$, de la distribuofteco ne devas proporcii al klosnombroj, *n*, sed ke oni travas ilin el (9'), eventuale kun la aldono (9'').La lasta konsiderindas nur ĉirkaŭ la maksimumo kaj aparta pritrakto montras ke nur en unu okazo (antaŭ aŭ tuj la maksimumo) oni ne uzu (9') sed anstataŭu (9') kaj (9'') per (10). Oni ĉie uzas por n_i ne la efektivajn sed la reguligitajn nombrojn (sufiĉas fari tion grafike).

Por la lasta klaso oni prenas kompreneble $n_{i+1} = o$, sed por la unua klaso oni ne konas n_{i-1}, pro kio la aŭtoro, per eksterpolo, trovas esprimon ($9'_1$), aŭ — en okazo de tre malbone difinita komenco de la kurbo — la esprimon ($9'_2$). Kiam oni sumas ĉiujn ŝanĝojn,

tiam —S△n montras nombron de arboj kiuj intertempe el la nula klaso enkreskis la unuan.

3 Por la unua problemo estas donita ekzemplo de diametro 28,3cm±o,5 kun alkresko 17mm±o,5 kaj montrita kio okazas: sen antaŭa proksimumigo, kun proksimumigo de nur diametro aŭ tuj de ambaŭ donoj (la dua kaj tria okazo donas la samon ĉiam). Jam la maksimuma eraro, 5,5mm en la unua kontraŭ 10mm en aliaj du okazoj, montras superecon de la unua procedo.

Por la dua problemo estas donita reala arbkomplekso, kun la donoj desur la tereno: 1 la klasdiametroj, 2 la trovitaj nunaj klasnombroj, 5 la meza alkresko en ĉiu klaso, 7 la distribuŝanĝoj laŭ individuaj alkreskoj, 8 volumeno de unu trunko el la klaso kaj 10 la tuta volumenŝanĝo. La posta kalkulado donis la kolonojn: 3 reguligitaj klasnombroj, 4 nombroj bezonaj por (9'), escepte (9_1'), kaj (10) ĉe la steletoj, 6 la rekonstruitaj nombroŝanĝoj laŭ la diritaj formuloj kaj 9 la tuta volumenŝanĝo. La diferencoj inter 6 kaj 7 estas neesencaj kaj la tuta sumo 9 kaj 10 diferencaj malpli ol 7%.