Popović B.

IZRAČUNAVANJE ZAPREMINE OBORENOG STABLA

1) Uvod

Autor dokazuje važnost Gauss-Simonijeve formule: $V = \frac{h}{2}(\gamma_1+\gamma_2)$, bez obzira na to kakav je oblik stabla.

Za izračunavanje zapremine stabla je najprostija formula: $V=\frac{h}{2}(g_1+g_2)$, gde je h dužina stabla, a g_1 i g_2 su površine krajnjih preseka stabla. Samo malo je komplikovanija, a mnogo pouzdanija, Gauss-Simonijeva formula:

$$V=\frac{h}{2}(\gamma_1+\gamma_2), \tag{1}$$

gde su γ_1 i γ_2 površine preseka na oko $\frac{1}{5}$ dužine od krajeva stabla, tačnije na daljini:

$$c=h\cdot\frac{3-\sqrt{3}}{6}\approx 0{,}211\,h \tag{2}$$

od krajeva stabla.

Do istog broja c autor je došao i odgovarajući na postavljeno pitanje: gde treba postaviti sečicu parabole, pa da zapremina zarubljenog konusa (koji nastaje obrtanjem te sečice) bude jednaka zapremini obrtnog paraboloida. To znači da Gauss-Simonijeva formula važi pored paraboloida i za zarubljeni konus, a za valjak važi **de si mem,** te se postavlja pitanje o granicama važnosti ove formule, kao i da li se njena važnost može sa pojedinih delova stabla proširiti na celo stablo.

Ovim člankom dokazujem da formula (1) za zapreminu stabla važi striktno kad je stablo makakva kombinacija konoida do trećeg stepena zaključno, tj. kad je presek stabla makakva funkcija oblika:

$$g = y^2\pi = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \tag{3}$$

Ali ona je vrlo tačna i kad je presek stabla funkcija četvrtog stepena, a to praktično znači da formula (1) važi za svaki (obični) oblik stabla.

2) Zapremina paraboloida i konusa

Kod paraboloida je interesantna osobina da formula (1) važi ne samo kad su preseci na određenoj daljini (2) od krajeva stabla, već i kad načinimo makakva dva simetrična preseka.

Uzmimo da je jednačina parabole $y^2 = px$, da su krajnji preseci stabla na daljini a i a + h od koordinatnog početka. Kad izmerimo preseke γ_1 i γ_2 na daljini c od krajeva stabla, onda će površina tih preseka biti:

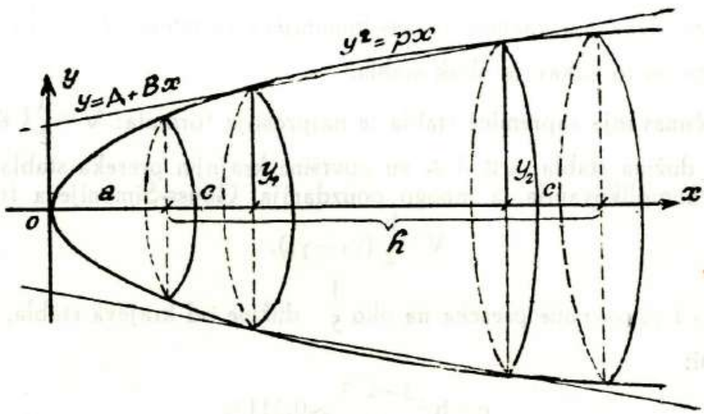
$$\gamma_1=y_1^2=p(a+c)\pi$$

$$\gamma_2 = y_2^2 = p(a+h-c)\pi \ ,$$

a njihov zbir $\gamma_1 + \gamma_2 = p\,(2a+h)\pi$. Međutim zapremina je

$$V = \pi \int_a^{a+h} y^2 dx = \pi p \frac{x^2}{2}\Big|_a^{a+h} = \frac{\pi p}{2}(2ah+h^2).$$

Dakle imamo $V = {}^1/_2 h\,(\gamma_1 + \gamma_2)$, bez obzira na daljinu c na kojoj smo presek merili.



Sl. 1

Ako stablo ima oblik zarubljenog konusa, onda je poznato da se zapremina stabla može naći po istoj formuli, ali samo pod uslovom da su preseci mereni na daljini (2) od krajeva stabla. Interesantan je jedan novi put kojim se dolazi do iste veličine c, naime postavljanjem izvodnice konusa tako da ona seče parabolu na dva mesta simetrična prema krajevima stabla, a da zapremina konusa bude jednaka zapremini paraboloidnog stabla.

Zapremina konusa će biti:

$$V = \pi \int_a^{a+h} (A+Bx)^2 dx = \frac{\pi}{3B}(A+Bx)^3\Big|_a^{a+h} =$$

$$= \pi h \Big[A^2 + AB(2a+h) + B^2(a^2 + ah + \frac{h^2}{3}) \Big] .$$

Odredimo A i B iz uslova da je:

$$y_1 = A + B(a+c), \qquad y_2 = A + B(a+h-c),$$

dakle:

$$B = \frac{y_2 - y_1}{h - 2c} \ , \ A = y_1 - B(a+c) \ ,$$

pa je zapremina:

$$V = \pi h \Big[y_1^2 - 2y_1 B(a+c) + B^2(a+c)^2 + (2a+h)y_1 B - B^2(a^2 + 2ac + hc - \frac{h^2}{3}) \Big] =$$

$$=\pi h\left[y_1^2+y_1B(h-2c)+B^2(c^2-hc+\frac{h^2}{3})\right]=$$

$$=\pi h\left[y_1^2+y_1(y_2-y_1)+(y_2-y_1)^2\cdot\frac{3c^2-3hc+h^2}{3(h-2c)^2}\right].$$

Da bi ova zapremina bila jednaka zapremini paraboloida, za koju smo videli da iznosi $\frac{1}{2}\pi h\,(y_1^2+y_2^2)$, bez obzira gde simetrično merimo ordinate $y_1, y_2,$ treba dakle da bude:

$$\frac{1}{2}\left(y_1^2+y_2^2\right)=y_1y_2+(y_2-y_1)^2\cdot\frac{3c^2-3hc+h^2}{3(h-2c)^2}:$$

$$3(h-2c)^2(y_1^2-2y_1y_2+y_2^2)=2(y_2-y_1)^2(3c^2-3hc+h^2)\ ;$$

$$3(h^2-4hc+4c^2)=6c^2-6hc+2h^2\ ;$$

(4) $$6c^2-6hc+h^2=0.$$

Ova jednačina nam daje tačno vrednost **(2)** za c. Postoji još i rešenje sa znakom + ispred korena, ali ono nam ne daje ništa novo, već samo prvi presek prebacuje na deblji, a drugi na tanji kraj stabla, jer je:

$$a+h\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{6}=a+h-h\cdot\frac{3-\sqrt{3}}{6}.$$

3) Zapremina makakvog konoida

Da bismo ispitali da li, tačnije koliko, Gauss-Simonijeva formula važi za druge konoide, poći ćemo od opšte zapremine konoida i postaviti uslov da je ona jednaka zapremini po formuli **(1)**, dakle za konoid koji nastaje obrtanjem krive:

(5) $$y^2=px^r$$

postavićemo uslov:

$$\pi\int_a^{a+h}px^r dx=\frac{p\pi}{r+1}\left[(a+h)^{r+1}-a^{r+1}\right]=\frac{\pi h}{2}(y_1^2+y_2^2),$$

pri čemu su y_1 i y_2 ordinate kod apscisa (a + c) i (a + h — c).

Za odredbu veličina p i a imamo uslove:

$$y_1^2=p(a+c)^r\quad,\quad y_2^2=p(a+h-c)^r$$

tj. a se određuje jednačinom:

(6) $$\left(\frac{a+h-c}{a+c}\right)^r=\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2,$$

a zatim je:

(7) $$p=\frac{y_1^2}{(a+c)^r}.$$

Kad ove vrednosti unesemo u gornji uslov, on postaje:

$$\frac{(a+h)^{r+1}-a^{r+1}}{(a+c)^r}=\frac{h}{2}\left[1+\left(\frac{a+h-c}{a+c}\right)^r\right](r+1) \quad ;$$

$$(8) \qquad \frac{2}{h}\left[(a+h)^{r+1}-a^{r+1}\right]=\left[(a+c)^r+(a+h-c)^r\right](r+1) \quad .$$

Ispitajmo koliko je ovaj uslov ispunjen za $r = 3, 4, 5 \ldots$.

Najpre za $r = 3$ imamo:

$$2(4a^3+6a^2h+4ah^2+h^3)=4[2a^3+3a^2h+3a(2c^2-2hc+h^2)+h^3-3h^2c+3hc^2] ;$$

$$4a(6c^2-6hc+h^2)+2h(h^2-6hc+6c^2)=0 \quad .$$

Kad c zadovoljava jednačinu **(4)** onda je i ova jednačina u potpunosti zadovoljena, te dakle (sa istim **c**) Gauss-Simonijeva formula važi i za svaki najloid.

Za $r = 4$ uslov **(8)** postaje:

$$2(5a^4+10a^3h+10a^2h^2+5ah^3+h^4)=5[2a^4+4a^3h+6a^2(2c^2+h^2-2hc)+$$
$$+4a(h^3-3h^2c+3hc^2)+(2c^4-4c^3h+6c^2h^2-4ch^3+h^4)] \quad ;$$

$$10a^2(6c^2-6hc+h^2)+10ah(6c^2-6hc+h^2)+5(2c^4-4c^3h+6c^2h^2-4ch^3+\frac{3}{5}h^4)=0$$

Sa jednačinom **(4)**, odn. sa izrazom **(2)** za **c**, prva dva sabirka otpadaju, pa da bi i ovde važila Gauss-Simonijeva formula treba još da bude:

$$2c^3(c-h)-2c^2h(c-h)+4ch^2(c-h)+\frac{3}{5}h^4=0 \quad ;$$

$$(9) \qquad 2c(c-h)(c^2-hc+2h^2)+\frac{3}{5}h^4=0$$

Da bismo ovu jednačinu rešili po **c**, podelićemo sve sa h^4 i kao novu nepoznatu uzeti:

$$(10) \qquad \zeta=\frac{c(c-h)}{h^2} \quad ,$$

pa ona postaje:

$$\zeta(\zeta+2)+0{,}3=0$$

i daje rešenje:

$$\zeta=-1\pm\sqrt{1-0{,}3}=-1\pm\sqrt{0{,}7}.$$

Tada ćemo **c** naći iz jednačine:

$$(11) \qquad \begin{aligned} c(c-h)&=h^2(1\pm\sqrt{0{,}7}) \\ c^2-hc+h^2(1\mp\sqrt{0{,}7})&=0 \end{aligned}$$

Rešenja mogu biti realna samo sa gornjim znakom i ona su:

$$(12) \qquad c=h\cdot\frac{1\pm\sqrt{-3+4\sqrt{0{,}7}}}{2}=h\cdot\frac{3\pm\sqrt{36\sqrt{0{,}7}-27}}{6}$$

Kad ovo uporedimo sa **(2)** vidimo da je razlika minimalna, jer je:

$$36\sqrt{0{,}7}-27=36.0{,}8366-27=3{,}12 \quad , \quad c\approx h.0{,}2051 \quad .$$

Praktično dakle, Gauss-Simonijeva formula važi u potpunosti i za konoid četvrtog stepena.

Sa r = 5 istim putem nalazimo:

$$6a^5+15a^4h+20a^3h^2+15a^2h^3+6ah^4+h^5=6a^5+15a^4h+30a^3(2c^2-2hc+h^2)+$$
$$+30a^2(h^3-3h^2c+3hc^2)+15a(h^4-4h^3c+6h^2c^2-4hc^3+2c^4)+3(h^5-5h^4c+$$
$$+10h^3c^2-10h^2c^3+5hc^4)\ ;$$
$$3a(10c^4-20hc^3+30h^2c^2-20h^3c+3h^4)+h(2h^4-15h^3c+30h^2c^2-30hc^3+15c^4)=0$$

Prvi sabirak će, bez obzira na **a**, biti jednak nuli ako je ispunjena jednakost (9), tj. ako **c** ima vrednost (12), za koju smo videli da je vrlo bliska vrednosti (2).

Drugi sabirak će biti jednak nuli ako je:

$$(9') \qquad 15c^3(c-h)-15c^2h(c-h)+15ch^2(c-h)+2h^4=0.$$

Ista nova promenljiva (10) svodi ovu jednačinu na:

$$\zeta(\zeta+1)+\frac{2}{15}=0\ ,\ \zeta=\frac{-1\pm\sqrt{7/15}}{2}\ ,$$

što daje:

$$(12') \qquad c^2-hc+\tfrac{1}{2}h^2(1-\sqrt{7/15})=0\ ;$$

$$c=h\cdot\frac{1-\sqrt{-1+2\sqrt{7/15}}}{2}=h\cdot\frac{3-\sqrt{6\sqrt{4{,}2}-9}}{6}\approx h\cdot\frac{3-\sqrt{3{,}30}}{6}\approx 0{,}1973h.$$

Obe veličine $\frac{c}{h}$ su i u ovom slučaju vrlo bliske vrednosti $\frac{1}{5}$ tako da praktično i ovde možemo da koristimo formulu (1).

4) Odstupanja od Gauss-Simonijeve formule

Za dalje konoide da vidimo uopšte koliko je zadovoljen uslov (8). Radi toga ćemo oblik ovog uslova malo uprostiti deobom sa h^r i oznakama:

$$(13) \qquad \frac{a}{h}=m\ ,\quad \frac{c}{h}=q\ ,$$

pa on postaje:

$$2[(m+1)^{r+1}-m^{r+1}]=[(m+q)^r-(m+1-q)^r](r+1)\ ;$$

$$2\left[(r+1)m^r+\binom{r+1}{2}m^{r-1}+\binom{r+1}{3}m^{r-2}+\ldots+(r+1)m+1\right]=$$
$$=(r+1)\left[2m^r+rm^{r-1}+\binom{r}{2}m^{r-2}(2q^2-2q+1)+\ldots\ldots+\right.$$
$$\left.+\binom{r}{k}m^{r-k}\,[q^k+(1-q)^k]+\ldots\ldots\right]$$

Prva dva sabirka na obema stranama se uvek poništavaju. Treći i četvrti zajedno postaju:

$$\binom{r+1}{3}m^{r-2}(6q^2-6q+1)+\binom{r+1}{4}m^{r-3}[4(1-3q+3q^2)-2]\ ,$$

te je i ovaj izraz jednak nuli usled jednačine (4) za odredbu **c**, uzev u obzir oznaku (13).

Dalji članovi, skupljeni na jednoj strani, imaju opšti oblik:

(14)
$$m^{r-k}\binom{r+1}{k+1}\left[(k+1)[q^k+(1-q)^k]-2\right]$$

Stavimo li ovde vrednost (2) za **q**, tj. $q=(3-\sqrt{3}):6$, onda treba da vidimo do kog broja **k** je u dovoljnoj meri zadovoljen uslov:

(15)
$$(k+1)\left[\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^k+\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right)^k\right]-2=0$$

ili:

$$1+\binom{k}{2}\frac{1}{3}+\binom{k}{4}\frac{1}{9}+\ldots\ldots=\frac{2^k}{k+1}=0\ .$$

Za k = 2 i k = 3 videli smo da se članovi potpuno poništavaju Za k = 4 i k = 5 videli smo da su oni vrlo bliski nuli. Za k = 6 ćemo imati:

$$1+5+\frac{15}{9}+\frac{1}{27}-\frac{64}{7}=8-\frac{8}{27}-8\frac{8}{7}=-8\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{27}\right).$$

Vidimo dakle da smo daleko od toga da članovi (15) budu = 0 za $k\geqslant 6$ i za **q** određeno izrazom (2). Pošto iz (15) ne možemo odrediti **q** ni za slučaj k = 6, jer se ta jednačina smenom (10) svodi na komplikovanu jednačinu 3 stepena, to probajmo da ocenimo koliko ovo poslednje odstupanje izraza (15) od nule, utiče na računatu zapreminu. Pri tome vodimo računa da je izraz (15) razlika između desne i leve strane uslova (8), koji je opet izražavao jednakost zapremina, s tim što smo zapremine delili sa $\pi h y_1^2$, potom množili sa $2,r+1,(a+c)^r$, a kasnije još delili sa h^r. Usled toga će trebati da odstupanje (15), pri upoređivanju sa zapreminama, još množimo sa:

(16)
$$\frac{\pi h}{2(r+1)}\left(\frac{h}{a+c}\right)^r\cdot y_1^2$$

Ocenu ovog izraza naći ćemo preko (6). Naime da bi bio ispunjen ovaj uslov za veliko **r** (sad ispitujemo za $r\geqslant 6$, jer smo za k = 5; pa dakle i za r = 5, utvrdili ispravnost te formule), treba da je **a** znatno veće od **h**, usled toga što **u:**

(6')
$$1+\frac{h-2c}{a+c}=\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{\frac{2}{r}}$$

desna strana ne može biti mnogo veća od 1 (za $y_2=3y_1$ i r = 6 ona je $<1^1/_2$). Dakle $\frac{h}{a+c}$ je manje, i to obično znatno manje, od 1. Zato i izraz kojim množimo odstupanja (15) je vrlo mali (za $\frac{h}{a+c}=\frac{2}{3}$ i r = 6 on iznosi samo $\frac{1}{44}hy_1^2$). Zbog toga, iako za k = 6 imamo u (15) odstupanje $\frac{7}{64}\cdot 8\cdot\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{27}\right)\approx\frac{1}{6}$, procentualna greška zapremine je vrlo mala.

Još tačnije ćemo oceniti ulogu ovih odstupanja na relativnu zapreminu ako uporedimo odstupanja (15) sa odgovarajućim izrazom za celu zapreminu. Pri tome ćemo uzeti poslednji član, tj. onaj kod koga je $k = r$, jer smo videli da su odstupanja (15) sve veća sa većim **k**. Relativno odstupanje (prema čitavoj desnoj strani jednačine) će onda biti:

$$\frac{(k+1)[q^k+(1-q)^k]-2}{(k+1)[(m+q)^k+(m+1-q)^k]}\cdot$$

Kod ocene ovog odstupanja treba najpre konstatovati da je ono utoliko veće ukoliko je m manje. a za m smo videli da je veće od 1 ($a > h$). Uzmimo u račun $k = 6$ i u imeniocu približno $q = 1/5$, $m = 1$, a u brojiocu tačne vrednosti (2), odn. malopre nađenu vrednost, pa je relativno odstupanje:

$$\frac{-\frac{7}{64}\cdot 8\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{27}\right)\cdot 2}{7(64+729)\left(\frac{3}{5}\right)^6}\approx\frac{-\frac{34}{4.27}}{793\cdot 7\cdot\frac{1}{20}}=\frac{-170}{793.7.27}\cdot$$

Ovo je po apsolutnoj vrednosti manje od 1/900, a ovakva preciznost je iznad svake preciznosti kojom određujemo zapremine stabala.

Za $r = 7$ bismo imali relativnu grešku manju od:

$$\frac{\frac{8\cdot 2}{2^7}\left(1+\frac{21}{3}+\frac{35}{9}+\frac{7}{27}\right)-2}{7(128+2187)\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^7}\approx\frac{\frac{1}{8}\left(8+\frac{112}{27}\right)-2}{7.2315.\frac{3}{100}}=\frac{-1+\frac{112}{216}}{21.23,15}\cdot$$

Ovde je relativna greška manja od 1/800, te i sa njom možemo biti u potpunosti zadovoljni.

Očevidno je da je dakle Gauss-Simonijeva formula praktično u važnosti i za konoide visokih stepena, nastalih rotacijom krive $y^2 = px^r$, ali sve manje ukoliko je **r** veće. Apsolutna važnost ove formule je samo do $r = 3$ zaključno.

5) Upotreba opšteg polinoma trećeg stepena

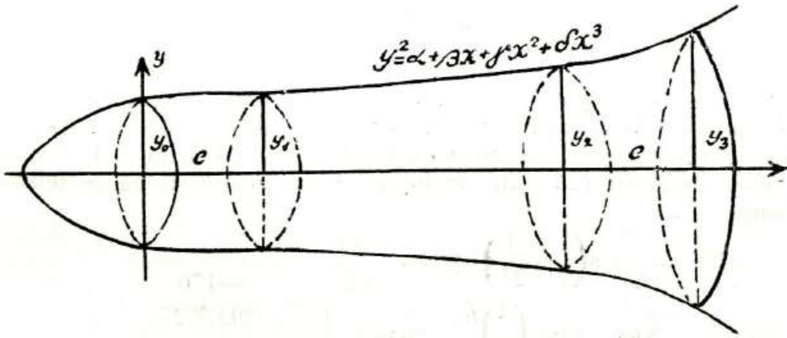
Stvarno stablo nema oblik nijednog čistog konoida, već je kombinacija konoida raznih stepena. Ova kombinacija se obično posmatra u tom smislu da pojedini delovi stabla imaju oblik pojedinih konoida, tako da na svaki deo stabla možemo primeniti Gauss-Simonijevu formulu. Teškoća je pri tome što se mora procenjivati gde su granice između pojedinih takvih delova stabla, što za svaki deo posebno moramo vršiti merenje i što pojedini delovi imaju samo približno formu određenog konoida.

Međutim stablo možemo i na jedan drugi način tretirati kao kombinaciju konoida raznih stepena, naime uzeti da je linija stabla kombinovana funkcija više stepena:

(17) $$y^2 = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3.$$

Ovakvo posmatranje dozvoljava postavljanje pitanja: pod pretpostavkom da linija stabla zadovoljava izraz (17), da li se samo sa dva preseka, po formuli Gauss-Simoni, može naći zapremina stabla?

Postavimo koordinatni početak u centar manjeg preseka stabla. (Očevidno je da slobodno možemo pomerati koordinatni početak duž **x**-ose — time se menjaju samo koeficijenti α, β, γ, a ne menja se oblik funkcije). Zapremina stabla će biti:



Sl. 2

$$V=\pi\int_0^h(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3)dx=\frac{\pi h}{12}(12\alpha+6\beta h+4\gamma h^2+3\delta h^3)$$

i ova zapremina treba da bude jednaka sa: $\frac{\pi h}{2}\left(y_1^2+y_2^2\right)$ **, gde su** y_1 **i** y_2 **ordinate na daljinama c od krajeva stabla. Pored ovog uslova, napišimo ga odmah u obliku:**

$$12\alpha+6\beta h+4\gamma h^2+3\delta h^3=6\left(y_1^2+y_2^2\right), \tag{18}$$

koeficijenti α, β, γ, δ, moraju zadovoljavati još uslove:

$$\begin{aligned} &y_0^2=\alpha\,, && y_1^2=\alpha+\beta c+\gamma c^2+\delta c^3\,, \\ &y_2^2=\alpha+\beta(h-c)+\gamma(h-c)^2+\delta(h-c)^3\,, && y_3^2=\alpha+\beta h+\gamma h^2+\delta h^3\,, \end{aligned} \tag{19}$$

pri čemu su y_0 i y_3 ordinate preseka na krajevima stabla.

Kad ove uslove, zajedno sa (18), tretiramo kao sistem od 5 jednačina sa 4 nepoznate, onda mora determinanta od koeficijenata uz α, β, γ, δ. biti jednaka nuli, tj.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & y_0^2 \\ 1 & c & c^2 & c^3 & y_1^2 \\ 1 & h-c & (h-c)^2 & (h-c)^3 & y_2^2 \\ 1 & h & h^2 & h^3 & y_3^2 \\ 12 & 6h & 4h^2 & 3h^3 & 6\left(y_1^2+y_2^2\right) \end{vmatrix}=0\,. \tag{20}$$

Ovo je jednačina iz koje treba odrediti **c** i, ako je ona zadovoljena sa vrednošću **(2)**, ili nekom vrlo bliskom vrednošću, bez obzira na ordinate y_0, y_1, y_2, y_3, onda se i sa ovakvom funkcijom **(17)** može primenjivati Gauss-Simonijeva formula.

Ako ovu determinantu razvijemo po elementima prve linije i uzmemo u obzir da jednačina treba da bude zadovoljena bez obzira na y_0, dobijamo dve jednačine:

$$(21)\quad \begin{vmatrix} 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & h\text{-}c & (h\text{-}c)^2 & (h\text{-}c)^3 \\ 1 & h & h^2 & h^3 \\ 12 & 6h & 4h^2 & 3h^3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} c & c^2 & c^3 & y_1^2 \\ h\text{-}c & (h\text{-}c)^2 & (h\text{-}c)^3 & y_2^2 \\ h & h^2 & h^3 & y_3^2 \\ 6h & 4h^2 & 3h^3 & 6\left(y_1^2 + y_2^2\right) \end{vmatrix} = 0 .$$

Kad u prvoj jednačini podelimo pojedine kolone sa 1, h, h^2, h^3, i unesemo oznaku $c/h = \zeta$, ona postaje:

$$\begin{vmatrix} 1 & \zeta & \zeta^2 & \zeta^3 \\ 1 & 1\text{-}\zeta & (1\text{-}\zeta)^2 & (1\text{-}\zeta)^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 12 & 6 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Oduzimanjem prve linije od druge i deobom sa faktorom $(1-2\zeta)$, koji se tada pojavi, pa istovremeno od četvrte linije oduzmemo trostruku treću, jednačina postaje:

$$\begin{vmatrix} 1 & \zeta & \zeta^2 & \zeta^3 \\ 0 & 1 & 1 & 1\text{-}\zeta+\zeta^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Sada ćemo treću liniju oduzeti od prve i druge i podeliti sa ζ-1 u prvoj liniji, što daje:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \zeta+1 & \zeta^2+\zeta+1 \\ -1 & 0 & 0 & \zeta^2-\zeta \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Zbir druge i treće linije oduzmemo od prve, pa u njoj izvršimo deobu sa ζ, to jednačina (razvijena po drugoj liniji) daje:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} + (\zeta^2-\zeta)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ili:

$$(4')\qquad 6\zeta^2 - 6\zeta + 1 = 0 ,$$

što upravo daje $c = \zeta \, . \, h$ iz **(2)**.

Ostaje još druga jednačina (21). U njoj ćemo zbir prve i druge linije pomnožiti sa 6 i oduzeti od četvrte linije; tada će elementi u njoj biti:

$$0,\ -2h^2+12hc-12c^2,\ -3h^3+6(3h^2c-3hc^2)=-3h(6c^2-6hc+h^2),\ 0.$$

Kad tu uvrstimo **c** iz (2), poništiće se i dva srednja elementa, tako da će svi elementi četvrte linije biti nule, pa će i determinanta biti nula.

Ovim je dokazano da **Gauss-Simonijeva formula (1) važi za sva stabla, cela ili u delovima, čija je linija stabla određena funkcijom oblika (17), bez obzira na veličinu koeficijenata** $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

6) Opšte važenje Gauss-Simonijeve formule

Ovakva formulacija Gauss-Simonijeve formule obuhvata sve slučajeve njene primene na pojedine delove stabla, jer funkcijom (17) možemo sve te delove obuhvatiti u jednu celinu, uzevši npr. za $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, takve konstante da se linija stabla poklapa sa 4 ordinate funkcije (17), a između njih prolazi negde iznad a negde ispod ordinata (17). Stabla obično nisu tako nepravilnog oblika da između te 4 zajedničke ordinate pokazuju neka nagla odstupanja, koja bi učinila znatnom razliku između stvarne zapremine i zapremine po funkciji (17).

No i za slučaj stabala nešto nepravilnijeg oblika možemo slobodno upotrebiti formulu (1). Dokaz za to možemo izvesti proširujući izraz (17) za još nekoliko člana višeg reda, recimo:

$$y^2=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\alpha_4 x^4+\alpha_5 x^5+\alpha_6 x^6\,. \tag{22}$$

Tada će uslov (18) imati oblik:

$$y_1^2+y_2^2=2\alpha+\beta h+\frac{2}{3}\gamma h^2+\frac{1}{2}\delta h^3+\frac{2}{5}\alpha_4 h^4+\frac{1}{3}\alpha_5 h^5+\frac{2}{7}\alpha_6 h^6\,, \tag{18'}$$

a pored uslova (19) imaćemo još tri uslova za proizvoljne apscise $h_4,\ h_5,\ h_6$, dakle zajedno će trebati da bude, analogno jednačini (20):

$$\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_0^2 \\
1 & c & c^2 & c^3 & c^4 & c^5 & c^6 & y_1^2 \\
1 & h\text{-}c & (h\text{-}c)^2 & (h\text{-}c)^3 & (h\text{-}c)^4 & (h\text{-}c)^5 & (h\text{-}c)^6 & y_2^2 \\
1 & h & h^2 & h^3 & h^4 & h^5 & h^6 & y_3^2 \\
1 & h_4 & h_4^2 & h_4^3 & h_4^4 & h_4^5 & h_4^6 & y_4^2 \\
1 & h_5 & h_5^2 & h_5^3 & h_5^4 & h_5^5 & h_5^6 & y_5^2 \\
1 & h_6 & h_6^2 & h_6^3 & h_6^4 & h_6^5 & h_6^6 & y_6^2 \\
2 & h & \frac{2}{3}h^2 & \frac{1}{2}h^3 & \frac{2}{5}h^4 & \frac{1}{3}h^5 & \frac{2}{7}h^6 & y_1^2+y_2^2
\end{vmatrix}=0. \tag{23}$$

Kad zbir druge i treće vrste oduzmemo od poslednje, u njoj ćemo imati elemente:

$$0,\ 0,\ -\frac{1}{3}h^2+2hc-2c^2,\ -\frac{1}{2}h^3+3h^2c-3hc^2,\ -\frac{3}{5}h^4+4h^3c\text{-}6h^2c^2+ \tag{24}$$

$$+4hc^3-2c^4,\ -\frac{2}{3}h^5+5h^4c-10h^3c^2+10h^2c^3-5hc^4,\ -\frac{5}{7}h^6+6h^5c\text{-}15h^4c^2+$$

$$+20h^3c^3\text{-}15h^2c^4+6hc^5-2c^6,\ 0.$$

Treći i četvrti element postaju nule kad za c upotrebimo vrednost (2). Peti element je, prema onom što smo videli kod jednačine (9), jednak nuli za za jednu vrednost c iz (12) skoro identičnu vrednosti (2). Šesti element je, usled (9'), takođe jednak nuli za vrednost **c** iz (12'), koja je takođe praktično jednaka sa (2). Isto će tako sedmi element biti jednak nuli za neku vrednost **c**, koja će biti data analognom jednačinom za konoid 6-og stepena. Tu vrednost ne možemo da izračunamo rigorozno kao ove ranije, jer se račun svodi na jednačinu trećeg stepena (sa vrlo komplikovanim opštim rešenjem), ali smo videli da je i sa tom vrednošću relativna greška u zapremini (po Gauss-Simonijevoj formuli) ništavna.

Tako smo dobili da su i ovde svi članovi poslednje kolone u gornjoj determinanti jednaki nuli, pa se dakle i tu može zapremina računati po Gauss-Simonijevoj formuli, uzevši praktično $c = \frac{1}{5}$. I pored toga što su za konoide većih stepena potrebni **c** koji sve više odstupaju od (2), ukupno je uslov (8) ispunjen za jedno **c** vrlo blisko vrednosti (2), što se lepo vidi na determinanti (23). Pojedini elementi (24) su jednaki nuli za razne vrednosti **c**, ali determinanta će biti jednaka nuli za neko **c** između njih, ako je razvijemo po tim elementima. U tome je suština onog što smo videli da je relativno odstupanje u zapremini beznačajno, iako smo za konoid šestog stepena našli da je kod jednog sabirka potrebno c dosta različito od (2) da bi taj sabirak postao nula.

Videli smo da, daljim povećavanjem stepena konoida, razlika između zapremine stabla po konoidu i po formuli (1) sve brže raste, ali je za nekoliko prvih stepena relativna razlika zanemarljiva. Koji je to stepen do koga je ona zanemarljiva, praktično nije važno, jer nema tako nepravilnih stabala za koje bi trebalo upotrebiti liniju stabla većeg stepena nego što je (22). Naime u (22) imamo 7 promenljivih parametara, koje možemo da odaberemo tako da se linija stabla poklopi sa linijom (22) na 7 najkritičnijih mesta (od kojih 2 moraju biti na oko $c = \frac{h}{5}$ od krajeva stabla), pa će onda odstupanja tih dveju linija jedne od druge između tih zajedničkih ordinata biti vrlo mala, a uz to negde u korist jedne a negde u korist druge linije, tako da će razlika u zapremini u svakom slučaju biti zanemarljivo mala.

Možemo dakle izvući generalni **zaključak:**

Gauss-Simonijeva formula daje potpuno tačnu zapreminu za sva stabla čija linija ima makoju kombinaciju oblika (17), a daje praktično tačnu zapreminu i za ostale (još komplikovanije) oblike stabla.

RESUMO

KALKULADO DE VOLUMENO DE LA TRUNKO

1) **Enkonduko.** La Gauss-Simoni-formulo (1) validas kiam γ_1 kaj γ_2 estas surfacoj de la trancoj je distanco (2), por paraboloido kaj por triagrada konoido. Gis kiu grado gi validas por aliaj konoidoj kaj cu oni povas uzi gin por la tuta trunko? La autoro mon ras ke (1) plenvalidas por ciu kombinajo (3) kaj gi estas kontentige uzebla ankau por aligradaj konoidoj.

2) **Volumeno de la paraboloido kaj konuso.** Unue la autoro montras interesajon ke (1) validas ce paraboloidoj kiam la trancoj estas faritaj simetrie ie ajn. Pro tio li simple trancas $y^2 = px$ je ajna distanco de ambau finoj (nur simetrie), kalkulas la surfacojn kaj la volumenon kaj elfalas (1), sendepende de c.

La autoro venis al la konata esprimo (2) ankau stariginte la demandon: Kie tranci simetrie la parabolon, por ke la sekanto rotaciante faru la konuson egalvolumena kun la paraboloido? La sekanton li prenas en la formo $y = \mathbf{A} + Bx$, trovonte A, B el la kondicoj ke la ordinatoj y_1, y_2, havu la apscisojn ($a + c$, $a + h - c$). Egaliginte la du volumenojn, li fine venas al la ekvacio (4), kiu donas jus la solvon (2). (La dua solvo nur intersangas la lokojn de la trancoj).

3) **Volumeno de ajna konoido.** Preninte la ekvacion (5) la autoro determinas **p** kaj **a** (la distanco de la trunkokomenco al la aksocentro) pere de (6) kaj (7), kio montras ke (8) estas la kondico por la valideco de (1) (au por determini **c**). Kiam $\mathbf{r} = 3$, la kondico kontentigas per (4). Kiam $r = 4$, post parta apliko de (4), la kondico prenas la formon (9), kaj pere de (10) gi donas la solvon (12), preskau la samvalora kun (2). Kiam $r = 5$, la kondico, post parta apliko de (4) kaj (9), ricevas la formon (9'). La solvo (12') trovigas same pere de (10) kaj gi denove estas tre proksima al 1/5 (kutime prenata anstatau) (2).

4) **Ekartoj de la formulo Gauss-Simoni.** Per la signajoj (13) oni sangas la formon de (8), kie la unuaj 4 membroj forfalas pro (4), la aliaj prenas la formon (14), do la kondicoj kontentigas per (4) kaj (15). Por $k = 4$, $k = 5$, (15) preskau kontentigas, sed por $k = 6$ ne tiom bone. Por taksi la ekarton, prenu (15) kiel parton de diferencoj de du volumenoj — kun la faktoro (16), kiu estas malgranda por pli grandaj **r,** car **a** devas esti multe pli granda ol **h** (kion oni vidas per (6)).

Pro eta faktoro (16) ankau la ekarto (15) ne estas granda. Tion oni vidas pli bone preninte rekte la relativan ekarton (rilate al la volumeno); oni vidas ke gi estas $< 1/900$ por $r = 6$, kaj $< 1/800$ por $r = 7$, kio plene pruvas la kontentigan uzeblecon de (1) ankau por aligradaj konoidoj.

5) **La generala triagrada polinomo.** Anstatau pritrakti la trunkon kiel kunmetajon de diversgradaj konoidoj, estas pli bone trakti gian linion kiel la kombinajon (17). Per la bildo 2, la egaligo de (1) kun la volumeno donas la kondicon (18) kun (19), kio kune donas (20), kaj gi kontentigas kun (21). La dua ekvacio (21) per kelkaj sangoj reduktigas al (4'), do kontentigas per (2). En la unua ekvacio multipliku per 6 la sumon de unuaj du linioj kaj deprenu gin de la lasta linio. Pro (2) ciuj giaj membroj nuligas, do (21) plene kontentigas. Sekve **La Gauss-Simoni-formulo validas por ciuj trunkoj, kies linio havas la formon (17), sendepende de α, β, γ, δ.**

6) **La generaleco de la formulo Gauss-Simoni.** Sekve de la supre pruvita, elektinte α, β, γ, δ, tiel ke la trunkolinio kongruu kun la 4 ordinatoj, trapasante inter ili ie supre ie sube, oni povas uzi ciam la formulon G. S., car la trunkoj estas neniam tiom neglataj ke la ekartoj farigus grandaj. Ec por trunkoj de ekstrema formo oni povas uzi gin, utiligonte pligradajn polinomojn, ekz. (22). Tiam al la kondicoj (19) venas tri aliaj, por ajnaj apscisoj h_4, h_5, h_6; kun eegaleco de la volumenoj ili donas (23). La sumon de la dua kaj de la tria linioj subtrahu de la lasta linio kaj gi farigas (24). La tria kaj la kvara elementoj nuligas pro (2), la kvina nuligas per (12), la sesa per (12'), kiuj praktike egalas al (2). La sepa elemento same nuligas por iu **c** kiun ni trovus por 6-grada konoido kaj por kiu ni vidis ke la relativa ekarto de la volumeno estas sensignifa.

Car ne ekzistas tiom eksterordinaraj trunkoj ke oni ne povas adapti 7 parametrojn de (22) al ili, oni povas **konkludi:** La Gauss-Simoni formulo (1) donas plengustan volumenon de ciuj trunkoj kies linio estas ajna kombinajo (17) kaj praktike gustan volumenon por ciuj aliaj (pli komplikaj) trunkoformoj.